Physikalische Zeitschrift

Begründet von E. Riecke und H. Th. Simon

Herausgeber:
Professor Dr. **M. Born** und
Professor Dr. **P. Debye**

Schriftleiter:
Dr. **Erich Hückel** in Göttingen

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von zwei bis vier Bogen zum Preise von jährlich 250 Mark, bei unmittelbarer Zustellung unter Kreuzband 370 Mark, im Ausland je nach dem Valutastande. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung, die Post sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Petitzeile mit 6.— Mk., Beilagen nach Vereinbarung berechnet; bei Wiederholungen tritt Ermäßigung ein.

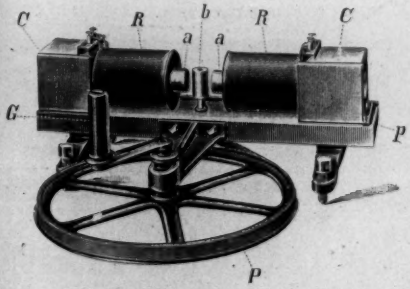
Alle Manuskriptsendungen und darauf bezügliche Zuschriften sind zu richten entweder an die Herausgeber: Professor Dr. M. Born, Göttingen, Planckstraße 21, und Professor Dr. P. Debye, Zürich, Physikgebäude, Gloriastr. 35 oder an die Schriftleitung: Dr. Erich Hückel, Göttingen, Bunsenstraße 9, Physikalisches Institut der Universität, alle Büchersendungen und Anzeigenaufträge an den

Verlag von **S. Hirzel** in Leipzig, Königstraße 2.

No. 14. 15. Juli 1922. No. 618. **23. Jahrgang.**

Phys.-mech. Institut von Prof. Dr. M. Th. Edelmann & Sohn,

München.



Elektro-magnet

mit Rotationsapparat zur Demonstration des Äthersiedens in einem rotierenden Kupferzylinder.

Katalog 30 erschienen und ebenso wie Spezialliste No. 29 über Saitengalvanometer und Registrierapparate, Spezialliste No. 31 über einfache Präzisionsschulapparate gratis und franko.

Mit einer Beilage von Gebrüder Borntraeger in Berlin, betreffend: Rinne, Das feinbauliche Wesen der Materie.

Inhaltsverzeichnis:

(B. — Besprechungen; T. — Tagesereignisse.)

	Seite
Fry, Th. C., Theorie des binauralen Hörens nebst einer Erklärung der empirischen Hornbostel-Wertheimerschen Konstante	273
Hören: Theorie des binauralen — nebst einer Erklärung der empirischen Hornbostel-Wertheimerschen Konstante, v. Th. C. Fry	273
Hornbostel-Wertheimersche Konstante: Theorie des binauralen Hörens nebst einer Erklärung der empirischen —, v. Th. C. Fry	273
London, F., Die Bedingungen der Möglichkeit einer Maßbestimmung in einer physikalischen Mannigfaltigkeit und das Prinzip der Ähnlichkeit. Schluß. (Z.-B.)	289
Maßbestimmung: Die Bedingungen der Möglichkeit einer — in einer physikalischen Mannigfaltigkeit und das Prinzip der Ähnlichkeit, v. F. London. Schluß. (Z.-B.)	289
Physiko-Mathematische Gesellschaft in Kratnodar. (T.)	296
Relativitätstheorie: Die Idee der —, v. H. Thirring. (B.)	296
Sichtmessung: Zur Theorie der —, v. A. Wigand	277
Thirring, H., Die Idee der Relativitätstheorie. (B.)	296
Wigand, A., Zur Theorie der Sichtmessung	277

Thermosäulen

zu kaufen gesucht. Angebote unter **S. H. 602** an den Verlag der Physikalischen Zeitschrift (S. Hirzel) in Leipzig, Königstraße 2 erbeten.

Einbanddecken zur Physikalischen Zeitschrift 1921 sind vorrätig und können zum Preise von M. 30.— durch jede Buchhandlung oder vom Verlag S. Hirzel in Leipzig, Königstr. 2 bezogen werden.

Neuste Konstruktion!

Kugelepiskop. D.R.P. 350311.

Franz Schmidt & Haensch

Berlin S. 42, Prinzessinnenstraße 16

Werkstätten für Präzisions-Mechanik und Optik.

Neue optische Spezialinstrumente eigener Konstruktion, Polarisations-, Spektral-, Projektionsapparate, Episkope u. a.

Preislisten kostenlos.

Neukonstruktionen

geodätischer und sonstiger wissenschaftlicher Instrumente und Apparate übernimmt unter vollster Wahrung des geistigen Eigentumsrechtes des Auftraggebers die

Konstruktions- und Versuchswerkstättenabteilung der INDUSTRIE-NEULAND Aktiengesellschaft

Dachauerstr. 13 MÜNCHEN Tel. 50784

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 14. 15. Juli 1922. Redaktionsschluß für No. 16 am 10. Juli 1922. 23. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

Thornton C. Fry, Theorie des binauralen Hörens nebst einer Erklärung der empirischen Hornbostel-Wertheimerschen Konstante. S. 273.

A. Wigand, Zur Theorie der Sichtmessung. S. 277.

Zusammenfassende Bearbeitungen:

F. London, Die Bedingungen der Möglichkeit einer Maßbestimmung in einer physikalischen Mannigfaltigkeit und das Prinzip der Ähnlichkeit. (Schluß.) S. 289.

Besprechungen:

H. Thirring, Die Idee der Relativitätstheorie. S. 296.

Tagesereignisse. S. 296.

Personalien. S. 296. **Angebote.** S. 296.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Theorie des binauralen Hörens nebst einer Erklärung der empirischen Hornbostel-Wertheimerschen Konstante.

Von Thornton C. Fry.

1. Einleitung. Bei den Forschern, die sich mit der Lokalisation von Schallquellen beschäftigt haben, haben Erörterungen über diejenigen besonderen Eigenschaften der Schallwelle eine beträchtliche Rolle gespielt, denen man die Erscheinung des binauralen Hörens zuschreiben könnte. Bei manchen dieser Betrachtungen trat die Frage in den Vordergrund, ob der Phasenunterschied oder der Unterschied der Ankunftszeiten der die beiden Ohren treffenden Schallwellen von größerer Wichtigkeit für die Lokalisation sei. Da nun diese Frage wieder in dieser Zeitschrift aufgeworfen worden ist[1]), mag es vielleicht von Interesse sein, kurz die Anschauung darzulegen, welche die Grundlage der von Herrn R. V. L. Hartley und mir selbst in den letzten vier Jahren angestellten Untersuchungen gebildet hat.

Die allgemeinen Grundzüge dieser Anschauung, soweit sie die reinen Töne betrifft, sind die folgenden:

a) Wenn die die beiden Ohren treffenden Schallreize dieselben Phasen und Intensitäten besitzen wie die von solchen Wellen hervorgebrachten, die von einer wirklichen physischen in dem Punkte P des Raumes befindlichen Schallquelle ausgehen könnten, so wird der Beobachter den Schall in diesen Punkt P verlegen.

b) Wenn die Phasen und Intensitäten von der Art sind, daß eine physische Schallquelle zu ihrer Entstehung nicht hätte Veranlassung geben können, es sei denn, daß die Wellen durch Reflexion oder irgendwie sonst verzerrt wären, so wird der Beobachter versuchen, sie auszugleichen, indem er entweder die Amplituden oder die Phasen oder beide als irrtümlich annimmt und unbewußt solche Korrektionen anbringt, die zu einer Lokalisierung führen. Sind nur kleine Korrektionen erforderlich, so wird die Lokalisation scharf sein, und die von verschiedenen Beobachtern erhaltenen Ergebnisse werden übereinstimmen. Wenn aber sehr große Korrektionen erforderlich sind, kann es schwierig, wenn nicht unmöglich sein, überhaupt ein Ergebnis zu erhalten.

Angewandt auf zusammengesetzte Töne, besagt die Theorie in dieser Form:

a) Die die beiden Ohren treffenden Schallreize können jeder in reine Töne aufgelöst werden.

b) Von den auf beide Ohren wirkenden Komponenten würde jedes Paar von gleicher Frequenz, wenn allein vorhanden, imstande sein, ein Bild in einem gewissen Punkte $P(f)$ zu geben.

c) Wenn der Schall, ausgehend von einer wirklichen Schallquelle, den Beobachter im Punkte P ohne Verzerrung erreicht hat, so wird jeder der Punkte $P(f)$ mit P zusammenfallen und der Beobachter den Schall dorthin verlegen.

d) Wenn der Schall verzerrt worden ist oder wenn die Schallreize im Laboratorium künstlich erzeugt worden sind, so ist es möglich, daß die Punkte $P(f)$ nicht alle zusammenfallen. In diesem Falle wird der Beobachter versuchen, sie unbewußt auszugleichen und die Leichtigkeit oder die Schwierigkeit, mit der er ein Urteil bildet, wird bestimmt sein durch das Ausmaß der erforderlichen psychischen Umordnung.

Es ist nicht Aufgabe dieser Arbeit, im einzelnen die Vorzüge dieser Theorie darzulegen. Das ist an anderer Stelle in geeigneter Weise

1) Kuntze, diese Zeitschr. **22**, 649, 1921.

geschehen[1]). Dafür wird sich die folgende Betrachtung darauf beschränken, drei Tatsachen nachdrücklich hervorzuheben: Die erste ist, daß der anschauliche Begriff der „Ankunftszeit" in Wirklichkeit so unbestimmt ist, daß, falls nicht die Schallreize auf die beiden Ohren identisch sind, es überhaupt unmöglich ist, ihn zu verwenden. Die zweite ist, daß man, wenn man die „Ankunftszeit" genau definieren will, zu einer Theorie geführt wird, die sich inhaltlich mit der Phasentheorie deckt und sich nur von ihr im Ausdruck unterscheidet. Die dritte Tatsache ist: Die Beobachtungen, die als ein Beweis für die Gültigkeit der auf die anschaulichen Begriffe von „Ankunftszeit" gegründeten Theorie vorgebracht worden sind, können in Wirklichkeit klarer verstanden werden, wenn sie nach der Phasentheorie gedeutet werden.

Es braucht kaum bemerkt zu werden, daß der Ausdruck „Phasentheorie" hier nicht in dem Sinne von Hornbostel und Wertheimer gebraucht wird[2]). Was diese Forscher Phasentheorie nannten — die Theorie, daß das Azimuth der Schallquelle gleich der Phasendifferenz der auf die beiden Ohren wirkenden Schallreize ist — ist offensichtlich falsch. Denn, würde sie gelten, so müßte eine im Freien gespielte Violine ihren Standort bei jeder Änderung der Tonhöhe zu verändern scheinen. Eine so törichte Theorie verdient kaum die Beachtung, die ihr Hornbostel und Wertheimer schenken, indem sie sie von Grund aus zerstören, so wenig Mühe das auch kostet.

2. Allgemeine Betrachtungen. Man hat versucht, den binauralen Sinn drei einfachen Eigenschaften der Schallwelle zuzuschreiben; ein Versuch schreibt sie dem Intensitätsunterschied der die beiden Ohren treffenden Schallreize zu, ein zweiter dem Unterschied der Ankunftszeit und der dritte dem Phasenunterschied. Man bemerkte jedoch bald, daß die erste dieser Eigenschaften unmöglich die in Betracht kommende sein könnte; denn die Beobachtungen zeigen, daß, sofern der Intensitätsunterschied für sich allein imstande sein sollte, den binauralen Sinn zu erregen, ein viel größerer Unterschied dazu erforderlich wäre als der, der in den alltäglichen Erfahrungen an Schallreizen vorkommt. Auch die zweite Eigenschaft, falls sie nicht weiter definiert wird, die Ankunftszeit als maßgebend anzunehmen, ist unnatürlich; denn das scheint vorauszusetzen, daß die auf beide Ohren wirkenden Schallreize von ein und derselben Druckwelle ausgehen. Das trifft aber außerhalb des Laboratoriums nicht zu, da der Kopf des Beobachters, wie jedes andere Hindernis, eine Verzerrung im Schallfelde hervorbringt. Die dritte Ansicht, die die Phasendifferenz als das Entscheidende ansieht, erfordert noch eine weitere Ausarbeitung, insofern sie zunächst nur für reine Töne zu gelten scheint, die selten außerhalb des Laboratoriums angetroffen werden.

Zu diesen Einwendungen gibt es noch eine ernsthaftere, die sich in gleicher Weise gegen alle drei Theorien wendet. Es ist eine Beobachtungstatsache, daß der binaurale Sinn nicht allein zu einem Urteil über die Richtung führt, in der sich die Schallquelle befindet, sondern auch zu einem Urteil über ihre Entfernung. Da diese beiden Koordinaten der Schallquelle unabhängig voneinander sind, können sie nicht als Funktion einer einzigen Variablen ausgedrückt werden. Es müssen daher mindestens zwei unabhängige Eigenschaften der Schallwelle an der Bildung des binauralen Urteils beteiligt sein.

Über die Frage, welches diese Eigenschaften sind, können wir einigen Aufschluß erhalten, wenn wir den Fall reiner Töne betrachten. Wo es sich um diese handelt, unterliegt es keinem Zweifel, welche Bedeutung den Ausdrücken „Phasenunterschied" und „Amplitudenverhältnis" zukommt. Andererseits ist die Bedeutung des Ausdrucks Ankunftszeit nicht so klar. Vom Standpunkt der anschaulichen Vorstellung, die sich an diesen Ausdruck anknüpft, sollte er bedeuten: „Zeit, zu der der Druck an der Stelle des Ohres zuerst von seinem Mittelwert abweicht", aber diese Definition ließe sich überhaupt nicht auf den Fall reiner Töne anwenden; denn gerade die Definition des reinen Tones besagt, daß er so lange bestanden hat und so lange angehalten wird, daß alle aus den Übergangszeiten stammenden Wirkungen zu vernachlässigen sind. Daher würde es äußerst unlogisch scheinen, unter der „Ankunftszeit" etwas anderes zu verstehen als den „Unterschied der Ankunftszeit der Wellenberge". Wenn man sich andererseits für diese Definition entscheidet, sind Ankunftszeit und Phasen nicht unabhängige Eigenschaften der Schallwelle, sondern jede von ihnen kann aus der anderen abgeleitet werden. Daher ist es nicht nur wahr, daß Phasen und Ankunftszeit nicht das für eine vollständige Theorie erforderliche Paar bilden können, sondern es ist ebenso wahr, daß eine Theorie, die sich auf eines der andern möglichen Paare gründet — Amplitude und Phase oder Amplitude und Ankunftszeit —

1) Siehe die späteren Verweise auf die Arbeiten von Hartley und Hartley u. Fry.

2) Hornbostel u. Wertheimer, Berl. Ber. 20, 388, 1920.

auch auf das andere Paar gegründet werden kann.

Da also jedes der beiden zur Verfügung stehenden Paare von Eigenschaften der Schallwellen in derselben Weise zur Erklärung des binauralen Hörens tauglich ist, muß die Entscheidung, welche wir verwenden wollen, ganz nach Zweckmäßigkeitsgründen getroffen werden. In diesem Zusammenhang haben wir uns ins Gedächtnis zurückzurufen, daß fast alle Arten akustischer Experimente in einem oder dem anderen Punkt von der Umwandlung des Schalles in Elektrizität mit Hilfe einer Art Telephontransformators Gebrauch machen und daraufhin von dem Übergang dieser Elektrizität durch ein Leitungsnetz. Von der durch eine derartige Versuchsanordnung bedingten „Veränderung der Ankunftszeit" zu reden, würde durchaus unnatürlich sein, während andererseits nichts Ungewöhnliches in der Feststellung liegen würde, daß „die Phase der Schallwelle verändert ist". Soweit daher reine Töne in Betracht kommen, ist offenbar Phase und Amplitude das Paar von Eigenschaften, das am meisten Vorteil bietet.

Würde dieses Paar ein natürliches Analogon unter den Eigenschaften der zusammengesetzten Schallreize besitzen, so würde es aussichtsreich erscheinen von ihm, bei dem Aufbau einer vollständigen Theorie Gebrauch zu machen. In diesem Zusammenhang wird ein bekannter mathematischer Satz von großer Bedeutung. Es ist Tatsache, daß jede Zeitfunktion, mag sie noch so unregelmäßig sein, aufgebaut werden kann aus einfach harmonischen Komponenten von passenden Perioden, Amplituden und Phasen. Benutzt man diesen Satz, um die Druckänderung in einem Ohr des Beobachters darzustellen, so erhält man das Fouriersche Integral

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, f(\lambda) \cos p(t-\lambda). \quad (1)$$

Durch Transformation bekommt man zunächst

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [a(p) \cos pt + b(p) \sin pt]\, dp \quad (2)$$

und darauf

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(p) \cos [pt - h(p)]\, dp. \quad (3)$$

Die Funktionen $A(p)$ und $h(p)$ bestimmen allein den Reiz $f(t)$. Sie sind überdies die Amplitude und Phase der harmonischen Komponenten von der Frequenz $\frac{p}{2\pi}$ und daher mit einem gewissen Sinn analog dem Paar von Eigenschaften, das wir für den reinen Ton gewählt haben.

Außerdem sind die Differentialgleichungen des Schallfeldes linear. Daraus folgt: Die Beziehungen zwischen den Phasen und die Beziehungen zwischen den Amplituden der Schallkomponenten von der Frequenz $\frac{p}{2\pi}$ in der Fourierschen Darstellung für das Feld eines zusammengesetzten Schalles sind identisch mit den Beziehungen zwischen den Phasen und zwischen den Amplituden in dem Felde eines reinen Tones von derselben Frequenz.

Diese mathematischen Feststellungen können physikalisch folgendermaßen umschrieben werden: Eine vollständige Kenntnis der Eigenschaften reiner Töne würde uns in den Stand setzen, die Ergebnisse von Versuchen über binaurales Hören vorauszusagen, die mit zusammengesetzten Schallreizen angestellt werden.

Kehren wir nun wieder zum Begriff der Ankunftszeit zurück. Man bemerkt, die ganze oben skizzierte Theorie kann unverändert durchgeführt werden, falls Ankunftszeit als Ankunftszeit der Wellenberge definiert wird. In diesem Sinne kann keine Unstimmigkeit bei der Anwendung auf zusammengesetzte Schallreize zwischen der Phasentheorie und der Zeittheorie eintreten, weil sie ebenso, wie das für den Fall reiner Töne zutrifft, auf denselben physikalischen Grundtatsachen aufgebaut sind. Danach ist klar, daß jede Erörterung über die Vorzüge einer der beiden Theorien vor der andern, wenn sie von der Annahme ausgeht, daß diese Theorien sich widersprechen, wertlos sein muß.

3. Das Problem des Kompensators. Der anschauliche Begriff Ankunftszeit in der Bedeutung als Zeit, zu der zuerst der Druck an der Stelle des Ohres von seinem normalen Wert abweicht, konnte zurückgewiesen werden, weil er sich nicht auf reine Töne anwenden ließ. Indes gibt es einen Typus von Problemen, auf die dieser anschauliche Begriff sich besonders gut anwenden läßt. Das trifft für den Fall zu, in dem die Reize auf beide Ohren der Form nach identisch sind, aber nicht gleichzeitig wirken. Reize dieser Art empfängt der Beobachter durch die Röhre des bekannten Kompensators, von dem Kuntze spricht. Es ist daher naturgemäß, zu untersuchen, ob die allgemeine, oben entwickelte Theorie in diesem Falle zu einfachen Ergebnissen führen kann oder nicht.

Betrachten wir das Problem des Kompensators vom Standpunkt der Phasentheorie aus. Wenn wir die Definition des Reizes auf das eine Ohr als durch die Gleichung (3) gegeben denken, kann die Gleichung, die den Reiz auf das andere Ohr definiert, gebildet werden, indem wir denselben Amplitudenfaktor $A(p)$ verwenden und die Phase entsprechend verändern. Da die Reize dadurch hervorgebracht werden, daß der Schall von derselben Schallquelle ausgehend durch Röhren hindurchgeht, deren Längen sich um D unterscheiden, so ist diese Phasenverschiebung ersichtlich gleich der Differenz der Phasen, die gleichzeitig in zwei durch eine Entfernung D in der Fortpflanzungsrichtung getrenntem Punkten bestehen. Wenn die Schallgeschwindigkeit v und die Frequenz der betreffenden Komponente $\frac{p}{2\pi}$ ist, so ist die Anzahl von Wellenlängen, die auf diesen Abstand D entfallen, $\frac{pD}{2\pi v}$. Daher ist die Phasendifferenz $\frac{pD}{v}$. Wenn also das von der Frequenz unabhängige Verhältnis $\frac{D}{v}$ mit ε bezeichnet wird und man dann die Phasenveränderung εp in (3) einführt, so erhält man das Ergebnis

$$f_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dp\, A(p) \cos [pt - p\varepsilon - h(p)]. \quad (4)$$

Es ist sofort ersichtlich, daß (3) und (4) sich nur dadurch unterscheiden, daß t in $t - \varepsilon$ geändert worden ist. D. h. $f(t)$ und $f_1(t)$ stellen identische Störungen dar, nur daß die zweite ε Sekunden später eintrifft als die erste. Mit anderen Worten, die Phasenverschiebungstheorie führt unmittelbar zum Begriff der Ankunftszeit. Daraus ist klar, daß der Nachteil, den die Anhänger der Phasentheorie gegenüber denen der anderen Theorie zu besitzen scheinen, wenn sie das Problem des Kompensators behandeln, in Wirklichkeit nicht vorhanden ist.

Tatsächlich ist der Nachteil auf der Gegenseite. Warum, ist leicht zu sehen, wenn man den Umstand in Erwägung zieht, daß, da der Kopf des Beobachters die Form der Schallwellen unter natürlichen und daher von denen des Laboratoriums abweichenden Bedingungen verändert, die durch den Kompensator gehörten Laute psychologisch unnatürlich sind. D. h. sie sind nicht Abbilder von Lauten, die überhaupt von irgendeiner wirklichen Schallquelle ausgehen können. Solche Reize könnten anderseits zu Beobachtungsergebnissen führen, die anomal erscheinen würden, wenn sie vom Standpunkt einer so einfachen Theorie gedeutet würden, wie die, die auf die anschauliche Vorstellung der Ankunftszeit aufgebaut ist. Das ist tatsächlich eingetreten, in wenigstens einem von Kuntze erwähnten Fall. Obwohl dieses Beispiel an sich keine große Bedeutung besitzt, so gibt es doch bis zu einem gewissen Grade eine Erläuterung des von uns besprochenen Umstandes.

4. Die empirische Hornbostel-Wertheimersche Konstante k. Bei ihrer Untersuchung über die scheinbare Richtung von identischen scharfen Schallimpulsen, die die beiden Ohren auf Wegen verschiedener Länge treffen, fanden Hornbostel und Wertheimer, daß 21 cm der geringste Wegunterschied ist, durch den bewirkt wird, daß der Schall den Beobachter genau von der Seite zu treffen scheint. Diese Länge nannten sie k. Da sie ferner keine besondere Beziehung zu den Abmessungen des Kopfes besitzt, so wurde, um mit Kuntze[1]) zu reden, geschlossen, daß sie „eine empirische Konstante" ist, „deren eigentliche Bedeutung noch unbekannt ist".

Da die verallgemeinerte Phasentheorie alle ihre Erklärungen von den Ergebnissen der Beobachtungen über reine Töne abhängig macht, so ist es natürlich, die analogen Weglängen für Töne verschiedener Frequenzen zu ermitteln. Nun hat Hartley[2]) gerade Kurven veröffentlicht, die über einen weiten Frequenzbereich den Zusammenhang zwischen dem Azimuth φ der Schallquelle und der Phasendifferenz P zum Ausdruck bringt. Aus diesen Kurven kann der Wert von P für den Fall, daß $\varphi = 90^0$ ist, abgelesen werden, d. h. für eine genau seitlich befindliche Schallquelle. Diese Ablesungen sind in der zweiten Spalte der Tabelle gegeben.

Tabelle.

Frequenz	P	k_f
310	90	27
620	165	25
930	230	23
1240	305	23
1860	440	22

Indem wir seinen Wert für die Schallgeschwindigkeit $(3{,}4 \cdot 10^4)$ benutzen, finden wir, daß die Weglänge in diesem Fall durch $k_f = \frac{94\,P}{F}$ gegeben ist. Auf diese Weise sind die Werte von k_f in der letzten Spalte erhalten.

Wie die Entwicklung in ein Fouriersches Integral zeigt, liegt der Hauptenergiebetrag für kurze Impulse von der Art, wie sie von Hornbostel und

1) Kuntze, a. a. O. S. 649.
2) Hartley, Phys. Rev. 13, 373. Juni 1919.

Wertheimer benutzt wären, im Bereiche hoher Frequenzen. Daher erscheint der Wert $k = 21$, den sie erhalten, durchaus nicht unverständlich. Vom Standpunkt der Zeittheorie ist er unerklärlich, da er keine erkennbaren Beziehungen zu den Dimensionen des Kopfes des Beobachters besitzt, aber vom Standpunkt der verallgemeinerten Phasenverschiebungstheorie ist er ganz verständlich, denn er ist nur eine abgeleitete Konstante, die aus bekannten Tatsachen über die Verzerrung des Schallfeldes gewonnen werden kann.

Schlußfolgerung.

Zusammenfassend können wir sagen, daß die endgültige Probe einer jeden Theorie der Umfang ist, indem sie sich in Übereinstimmung mit den beobachteten Tatsachen befindet. Wir werden daher keine unbeträchtliche Stütze zugunsten der Phasentheorie in dem Umstande sehen, wenn sie behaupten kann, daß keine einzige sicher begründete Beobachtungstatsache, die zur Kenntnis von Herrn Hartley oder mir gekommen ist, qualitative Unstimmigkeiten mit ihr gezeigt hat und daß, soweit quantitative Untersuchungen angestellt worden sind, dieselbe Feststellung zu Recht besteht. Das Gewicht dieses Argumentes wird überdies noch erhöht durch die Tatsache, daß viele der betrachteten Experimente unter Bedingungen angestellt worden sind, die vom psychologischen Standpunkt aus künstlich sind[1]). Die Zukunft kann zeigen, daß die Theorie unvollständig ist. Aber sicher ist: Wenn Kuntze über das, was er als Phasentheorie bezeichnet, das Urteil ausspricht: „Sie steht mit der Erfahrung im Widerspruch", so ist dieses Urteil auf die hier vertretene Phasentheorie sicher nicht anwendbar, und sollte es auch wahrscheinlich nach seiner Meinung nicht sein.

Man kann die Ansicht vertreten, daß, da die hier besprochene Phasentheorie sich ebensowohl in Begriffen der Zeittheorie darstellen läßt, es kaum logisch sei, sie überhaupt eine Phasentheorie zu nennen. Indes ist zu beachten, daß, um diese Darstellung durchzuführen, es notwendig ist, den anschaulichen Begriff der Ankunftszeit vollständig aufzugeben und dafür von dem Inbegriff aller Ankunftszeiten aller periodischer Fourierscher Komponenten der Schallreize zu reden, wobei Ankunftszeiten als die Zeiten definiert sind, zu denen die Wellenberge anlangen. Eine solche Theorie eine „Ankunftszeittheorie" zu nennen, könnte leicht Mißverständnisse auf seiten des Lesers hervorrufen, der zu der Erwartung berechtigt wäre, den Ausdruck Ankunftszeit in seinem anschaulichen Sinne gebraucht zu finden. Außerdem ist mit dem Gebrauch des Begriffes „Phasenverschiebung" ein positiver Vorteil verbunden, den wir oben erwähnt haben, und der darin besteht, daß, wenn elektrische Ströme in irgendeiner Stufe des Prozesses eingeführt werden, die Nomenklatur übereinstimmend wird mit der, die gewöhnlich in der Theorie der Stromkreise gebraucht wird.

Research Laboratories of the American Telephone and Telegraph Company and Western Electric Company, Inc. 13. Februar, 1922.

(Eingegangen 3. Mai 1922.)

1) Wegen einer Erörterung der Deutung von den experimentellen Ergebnissen im Lichte dieser Theorie s. Hartley a. a. O. und Hartley u. Fry, Phys. Rev. **18**, 431, Dezember 1921.

Zur Theorie der Sichtmessung.

Von Albert Wigand.

1. Problem. Bei der Methode des Sichtmessers[1]) ist man zur Bestimmung der Sicht nicht auf solche Ziele beschränkt, die sich an der Grenze der Erkennbarkeit befinden, sondern man kann auch Ziele, die wesentlich näher als die Sichtweite liegen, zur Messung verwenden. Es ist damit ein Verfahren von allgemeiner Brauchbarkeit gegeben, dessen Ergebnisse von objektivem Wert sind und die mit großen persönlichen Fehlern behafteten, geschätzten Sichtweiten an Genauigkeit erheblich übertreffen.

Soll aber die erreichbare Meßgenauigkeit voll ausgenutzt werden, so ist bei der Berechnung der Lufttrübung und der Sicht zu berücksichtigen, daß die Trübung des im Sichtmesser verwendeten Mattglases auf andere Weise zustande kommt als die Trübung der Luft bei dunstigem und nebligem Wetter.

Die „Sicht" S ist definiert als der reziproke Wert der auf die Einheit der Entfernung des Ziels reduzierten Lufttrübung T. Die mit der Entfernung l des Ziels (gemessen für gewöhnlich in Kilometern) sich ändernde Lufttrübung wird bei der Methode des Sichtmessers durch variable Mattglastrübung a zu einem konstanten maximalen Trübungswert $a_m = 14{,}3$ ergänzt, so daß man das Ziel gerade eben nicht mehr erkennen kann und der Zahlenwert $(a_m - a)$ das Maß der Lufttrübung bildet. Um aus

1) A. Wigand, diese Zeitschr. **20**, 151, 1919; Meteor. Zeitschr. **36**, 342, 1919; Ann. d. Hydr. u. marit. Met. **47**, 134, 1919 („Stufen-Sichtmesser"); A. Wigand, diese Zeitschr. **22**, 484, 1921; Meteor. Zeitschr. **38**, 349, 1921; „Das Wetter" 1922, S. 54 („Blenden-Sichtmesser").

solchen Beobachtungen die auf die Einheit der Zielentfernung reduzierte Lufttrübung und damit die Sicht möglichst einfach berechnen zu können, wäre die Mattglastrübung am zweckmäßigsten so abzustufen oder stetig variierbar einzuteilen, daß ihre Skala einen für die Änderung der Lufttrübung mit der Entfernung des Ziels angepaßten Maßstab darstellt, d. h. man sollte die variable Trübung des Mattglases so bezeichnen, daß sie nach demselben Gesetze zunimmt, nach dem die Lufttrübung wächst mit Zunahme der Zielentfernung. Die Reduktion auf die Einheit der Zielentfernung hätte dann nach diesem Gesetze zu erfolgen.

Macht man die nächstliegende und nicht unwahrscheinliche Annahme, daß sich die Trübung der Luft bis zu dem Grade des Verschwindens nicht selbstleuchtender Objekte proportional der Schichtdicke l ändert, so würde bei angepaßter Trübungsskala des Mattglases im Sichtmesser die zunächst als Näherungsformel benutzte lineare Beziehung zur Reduktion der Lufttrübung $(a_m - a)$ auf die Zielentfernung 1 streng gelten:

$$T = \frac{a_m - a}{l},$$

und die Sicht wäre gegeben als:

$$S = \frac{1}{T} = \frac{l}{a_m - a}.$$

Es müßte sich danach bei gleichem Zustand der getrübten Luft für verschieden entfernte Ziele derselbe Wert für T bzw. S ergeben.

Die Erfahrung zeigt aber, daß dies bei Verwendung der bisherigen a-Skala des Sichtmessers nur mit roher Annäherung der Fall ist. Benutzt man zur Sichtmessung Ziele mit großem Entfernungsunterschied, wobei die Entfernung des weiteren Ziels ein Mehrfaches ist der Entfernung des näheren Ziels, so ergibt durchweg das entferntere Ziel einen größeren S-Wert als das nähere. Bei den in der erstgenannten Veröffentlichung mitgeteilten Beispielen überschritten diese Unterschiede kaum die Fehlergrenze, da die Zielentfernung weniger als im Verhältnis 1 : 2 variiert wurde, so daß ich zunächst den Einfluß der Zielentfernung auf den Sichtwert S für unwesentlich hielt. Der immerhin doch erkannte systematische Fehler ließ sich meist dadurch erklären, daß das entferntere Ziel in der Regel höher liegt und sich daher oft in geringerer Dichte der Bodendunstschicht befindet, so daß die bis zu ihm hin gemessene und auf die Einheit der Entfernung reduzierte Lufttrübung kleiner, die Sicht also größer werden muß. Spätere Versuche mit Varüerung der Zielentfernung bis zum Verhältnis 1 : 10, auch bei Nebel, haben dann einwandfrei gezeigt, daß hier eine Gesetzmäßigkeit vorliegt, die in einer Formel zur genauen Sichtberechnung aus Sichtmesserbeobachtungen derart zu berücksichtigen ist, daß man Sichtwerte bekommt, die (bei objektiv gleichmäßig getrübter Luft) von der Zielentfernung unabhängig sind. Wie dies zu geschehen hat, wird im 4. und 5. Abschnitt gezeigt werden.

Die Ursache dafur, daß die einfache lineare Formel nicht exakt gilt, ist nach den einleitenden Bemerkungen darin zu sehen, daß die Trübungsskala des Mattglases, auf der man den Mattglastrübungsgrad a abliest, nach einem anderen Gesetze zunimmt als die Trübung der Luft durch Dunst und Nebel bei Zunahme der Luftstrecke. Die Mattglasskala des Stufensichtmessers, die als Normalskala auch dem Blendensichtmesser zugrunde gelegt ist, wurde, wie es am nächsten lag und auch technisch am einfachsten war, so eingerichtet, daß die Mattfilter der einzelnen Trübungsstufen die gleiche Trübung zeigen wie ganzzahlige Sätze von aufeinander gelegten Filtern mit der als willkürliche Einheit zugrunde gelegten kleinsten Trübungsstufe „1"; beispielsweise hat Filter „2" den Trübungsgrad von zwei aufeinander gelegten Filtern „1", Filter „14" von 14 Filtern „1" oder 7 Filtern „2". Die größte mögliche Filterzahl, wie sie bei fehlender Lufttrübung oder ganz nahem Ziel zum Verschwinden des Ziels mit dem Sichtmesser eingestellt wird, ist nicht mehr ganzzahlig, sondern hat den Wert 14,3; diese Apparatkonstante ist durch die willkürliche Wahl der Filtertrübung „1" gegeben.

Die a-Skala der Mattglastrübung ist also linear hinsichtlich der Anzahl der aufeinander gelegten, gleich getrübten Einheitsmattgläser. Daß die Trübung selbst nicht streng proportional der Filteranzahl variieren würde, war natürlich vorauszusehen. Da es an näheren Kenntnissen über die Gesetzmäßigkeiten der Mattglastrübung und überhaupt an einer scharfen physikalischen Begriffsbestimmung dieser „Trübung" fehlte, wurde zunächst einmal als Annäherung angenommen, daß die Abweichungen dieser Trübungsskala von der Linearität gleichartig und nicht größer seien als die entsprechenden Abweichungen einer Trübungsskala, die sich ergibt, wenn man die Lufttrübung proportional der Luftstrecke setzt; daß man daher die Lufttrübung mit dieser Mattglasskala als einem angepaßten Maßstabe genügend genau messen könne.

Nun zeigt aber die experimentelle Prüfung der einfachen S-Formel wie auch die theoretische Überlegung, daß dies bei höheren Ansprüchen an Genauigkeit nicht der Fall ist. Zwar beruht

die Trübung des Mediums sowohl beim Mattglas wie bei der Luft grundsätzlich auf Lichtzerstreuung und Absorption, was sich bei Betrachtung eines Ziels durch das Medium hindurch in der Aufhellung des Zwischenmediums und in teilweiser Abdeckung des Ziels äußert. Im einzelnen aber sind diese Vorgänge bei Mattglas und Luft doch sehr verschiedener Art, so daß man nicht das gleiche Gesetz für die Änderung der Trübung mit der Schichtdicke bzw. Filterzahl erwarten kann.

Beim Mattglas haben wir flächenhafte Anordnung der trübenden Teilchen, die aus sehr verschiedenartig geformten Unebenheiten der mattierten Glasoberfläche bestehen. Die mikroskopische Untersuchung der im Sichtmesser verwendeten Mattgläser ergab bei etwa 100facher Vergrößerung ein je nach dem Trübungsgrad verschiedenes Bild: ein Mattglas des Blendensichtmessers vom Trübungsgrad $a = 14{,}5$ zeigte eine gleichmäßig granulierte Fläche, wobei die einzelnen Unebenheiten so dicht nebeneinander lagen und ineinander übergingen, daß eine Zählung und Größenbestimmung unmöglich war. Ein Mattglas mit dem kleineren Trübungsgrad $a = 11$ zeigte in der ebenen Glasoberfläche voneinander getrennte Vertiefungen mit unregelmäßiger, infolge des Abschleifens rundlicher Form und verschiedener Tiefe; die Anzahl dieser trübenden Teilchen war von der Größenordnung 10^6 auf 1 cm^2 der Glasfläche. Durch weiteres Abschleifen auf geringeren Trübungsgrad ging Anzahl und Größe der Teilchen weiter herunter.

Im Nebel und Dunst sind die trübenden Teilchen räumlich angeordnet und bestehen bei Wassernebel ausschließlich, bei Dunst meist vorwiegend aus kugelförmigen Flüssigkeitströpfchen, bei Eisnebel aus nadel- und plättchenförmigen Kristallen. Aber nicht nur Anordnung, Form und physikalische Natur der Teilchen ist bei Mattglas und trüber Luft sehr verschieden, sondern auch ihre Größe und Anzahl.

Ferner ist zu erwarten, daß die Trübungsgesetze für Dunst und Nebel zwar qualitativ ähnlich, jedoch quantitativ etwas verschieden sind; denn die Dunsttröpfchen haben Radien von der Größenordnung 10^{-3} cm[1]), sind also kleiner als die Lichtwellenlängen, während die Radien der Nebeltröpfchen im Bereich von 0,1 bis $3 \cdot 10^{-3}$ cm liegen. Und außerdem wirken im Dunst neben den flüssigen Kondensationskernen auch feste Teilchen (Staub) verschiedenster Art, Form und Größe bei der Trübung mit.

2. Versuche mit dem Blendensichtmesser über das Gesetz der Mattglastrübung. Während man über die physikalischen Gesetze der atmosphärischen Trübung bereits einigermaßen unterrichtet ist, fehlen entsprechende Kenntnisse für das Mattglas noch fast ganz. Die Verhältnisse sind hier für die theoretische Beherrschung anscheinend ebenso kompliziert wie bei der diffusen Reflexion. Anlaß und Gelegenheit zur Untersuchung des Trübungsgesetzes beim Mattglas boten meine Versuche mit dem Blendensichtmesser und die Vergleichung dieses Instruments mit dem Stufensichtmesser[1]).

Die dem Blendensichtmesser zugrunde liegende Tatsache ist folgende: Die Trübung eines Mattglases wächst mit seiner Beleuchtungsstärke. Ordne ich ein Mattglas am Ende eines Rohres so an, daß es nur vom anderen Rohrende her durch eine dem Mattglas parallele Irisblende hindurch Licht empfängt, so wächst für zentrales Hindurchschauen seine Trübung mit der Öffnung der Blende. Ebenso wächst seine Trübung bei konstanter Blendengröße, wenn man mit der Rohrlänge die Entfernung der Blende vom Mattglas verkleinert. Maßgebend für den Grad der Trübung ist die Beleuchtungsstärke des Mattglases, meßbar als der räumliche Winkel ω des Lichtkegels, der, durch Blendenöffnung und Rohrlänge gegeben, das in zentraler Durchsicht betrachtete Oberflächenelement des Mattglases mit seiner Spitze trifft. Ist dieser Winkel und damit die Beleuchtungsstärke des Mattglases sehr klein, so kann die Trübung auch eines dicht mattierten Glases ganz gering werden.

Mit der Größe von ω ändert sich der Einfallswinkel auf der Mattscheibe und der Austrittswinkel der zerstreuten Lichtstrahlen. Aber nicht diese Winkeländerungen sind das für die Mattglastrübung Maßgebende, sondern nur die Beleuchtungsstärke des Mattglases, wie sie geregelt wird durch die von der Blendenöffnung eingelassene Lichtmenge und die Rohrlänge. Es kommt also nur darauf an, wie groß der absolute Betrag des räumlichen Öffnungswinkels ω des auffallenden Lichtkegels ist; und die bei Änderungen von ω auftretenden Richtungsänderungen eines Teils der auffallenden Strahlen spielen keine Rolle.

Daß dem so ist, konnte ich durch folgende Versuche bestätigen: Bei konstant gehaltenem Öffnungswinkel ω wurde die Beleuchtungsstärke des Mattglases auf andere Weise variiert, indem im verdunkelten Raum zur Beleuchtung des Mattglases im Sichtmesser eine kugelförmige, mattierte Metallfadenlampe diente, die einige Meter entfernt aufgestellt war, und deren Helligkeit durch Vorschaltung eines Widerstands herab-

1) A. Wigand, Ann. d. Phys. **59**, 731, 1919.

1) A. Wigand, diese Zeitschr. **22**, 434, 1921.

gesetzt werden konnte. Diese Lampe verhält sich dann wie eine Irisblende von konstanter Öffnung, und da bei der Beobachtung die Entfernung des Sichtmessers von der Lampe unverändert bleibt, ist ω konstant. Als Ziel wurde ein schwarzer Schirm mit einem kleinen weißen Quadrat seitlich etwas vor der Lampe, ohne von ihr Licht zu empfangen, aufgestellt und vom verdunkelten Fenster her durch eine kleine Öffnung schwach mit Tageslicht beleuchtet; in den Sichtmesser gelangte direkt kein Tageslicht, sondern nur das Licht der Lampe, jedoch zur Vermeidung von Blendung des Auges etwas von der Seite her, so daß, wenn der Sichtmesser zentral auf das Ziel gerichtet wurde, die Lampe am Rande des Gesichtsfeldes gerade eben nicht mehr zu sehen war. Dann verschwand das bei schwachleuchtender Lampe mit dem Blendensichtmesser deutlich erkennbare Ziel, wenn die Helligkeit der Lampe von 36 auf 100 Kerzen gesteigert wurde. Mit dem Stufensichtmesser trat dasselbe ein, und es mußte zum Wiedererscheinen des Ziels bei größerer Beleuchtungsstärke der Mattgläser eine kleinere Filterzahl eingeschaltet werden. Bei zwei Versuchen mit verschieden deutlichem Ziel ergaben sich beispielsweise folgende Filterzahlen a für die Einstellung des Stufensichtmessers auf Verschwinden des Ziels:

Versuch	Nr. 1.	Nr. 2.
bei 36 HK	$a = 7$	13
„ 100 HK	$a = 5$	10

Die Trübung des Mattglases nimmt also mit seiner Beleuchtungsstärke zu, wenn diese bei konstantem ω vergrößert wird.

Daß Änderungen des Austrittswinkels der Lichtstrahlen, wenn sie nicht größer sind als die beim Blendensichtmesser durch Variation von ω vorkommenden, für die Mattglastrübung nichts ausmachen, zeigt das Ergebnis des folgenden Versuchs: Das kurze Rohrstück vom Mattglas bis zum Auge wurde beträchtlich verlängert; es trat aber bei zentralem Durchblicken auf ein Ziel keine merkliche Änderung der Trübung infolge der Rohrverlängerung ein. Bei diesem Versuche gelangen in das entferntere Auge relativ mehr von der Einfallsrichtung seitlich abgelenkte zerstreute Lichtstrahlen als in das nähere Auge.

Bekanntlich ist ganz allgemein bei trüben Medien die Lichtzerstreuung keineswegs unabhängig von der Richtung des einfallenden Strahls. Ein Oberflächenelement des Mattglases strahlt das in ihm beim Durchgang zerstreute Licht nicht mit gleicher Stärke nach allen Richtungen aus, sondern mit einem Maximum in der Einfallsrichtung und einem Minimum senkrecht zu

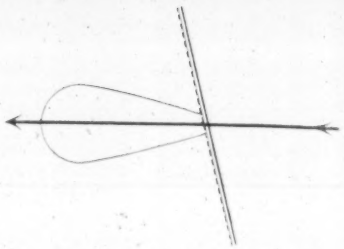


Fig. 1.

ihr. Fig. 1 zeigt nach Erfahrungen aus der Beleuchtungstechnik schematisch die Intensitätsverteilung des in mattiertem Klarglas nach vorwärts zerstreuten Lichtes in Beziehung zur Richtung des beleuchtenden Strahls[1]). In dieser Richtung und nahe benachbart wird am meisten Licht zerstreut; mit zunehmender Abweichung von dieser Richtung nimmt die Intensität des zerstreuten Lichtes schnell ab. Im Blendensichtmesser wäre es daher denkbar, daß sich bei größerem ω für die aus der Nähe des Blendenrandes kommenden Strahlen, die am stärksten von der Visierrichtung abweichen, die seitliche Intensitätsabnahme der Kurve in Fig. 1 bemerkbar macht. Der zuletzt beschriebene Versuch müßte diesen Einfluß, wenn er merklich wäre, als Verringerung der Trübung bei Vergrößerung des Augenabstandes von der Mattscheibe zeigen. Da dies nicht der Fall ist, bleibt der Winkeleinfluß unterhalb der Fehlergrenze.

Bei gerader Durchsicht durch die Randpartien des Mattglases des Sichtmessers ist die Trübung kleiner als in der Mitte. Das durchschaute Randstück des Mattglases wird vom entfernteren Blendenrande her unter größerem Einfallswinkel beleuchtet als das Mittelstück, so daß sich die seitliche Intensitätsabnahme des zerstreuten Lichts bemerkbar machen kann.

Blickt man durch ein freigehaltenes Mattglas (ohne Rohr und Blende) schräge hindurch, so ist die Trübung größer als bei senkrechter Durchsicht, weil alsdann mehr trübende Teilchen auf die Flächeneinheit der senkrecht zur Visierrichtung gelegten Projektionsebene kommen.

Die beiden zuletzt genannten Fälle (Rand- und Schrägstellung des Mattglases) kommen aber in der Praxis der Sichtmessung nicht vor.

Außer durch Aufhellung infolge der Lichtzerstreuung könnte die Mattglastrübung auch noch dadurch zustande kommen, daß die trüben-

1) Vgl. auch E. Liebenthal, Prakt. Photometrie, S. 88, Braunschweig 1907.

den Teilchen das anvisierte Ziel teilweise abdecken. Das ist aber nicht merklich der Fall, wie folgender Versuch zeigt: Vermeidet man den Einfluß von diffus durchgelassenem Licht beim Betrachten eines Objekts durch ein Mattglas hindurch, indem man z. B. die stark getrübte Mattscheibe einer photographischen Kamera auf Druckschrift auflegt, so kann man die Buchstaben sehr deutlich erkennen, während beim Hindurchblicken durch diese frei gehaltene Mattscheibe kein Gegenstand erkennbar ist.

Daraus ist zu folgern, daß bei der Mattglastrübung die teilweise Abdeckung des Ziels durch die trübenden Teilchen nur eine untergeordnete Rolle spielt, daß vielmehr überwiegend die durch Lichtzerstreuung bewirkte Aufhellung des Mediums für die Trübung bestimmend ist.

Wir wollen daher als Maß der Mattglastrübung nur die Lichtzerstreuung nehmen und können nun, indem wir die vom Mattglas durchgelassene zerstreute Lichtstärke proportional setzen der Beleuchtungsstärke[1]), die so gemessene „Trübung" als Funktion der Filterzahl a des Stufensichtmessers untersuchen, indem wir bestimmen, welche Anzahl von aufeinandergelegten Einheitsfiltern beim Stufensichtmesser für jeden Öffnungswinkel des Blendensichtmessers die gleiche Trübung ergibt. Das geschieht am einfachsten so, daß man bei dunstigem Wetter für Ziele im Gelände durch Einstellen auf deren Verschwinden einerseits den a-Wert des Stufensichtmessers und andererseits Blendenöffnung und Rohrlänge des Blendensichtmessers ermittelt. Durch dieses Verfahren kann der Blendensichtmesser nach der a-Skala des Stufensichtmessers geeicht werden.

Eine große Anzahl solcher Messungen habe ich mit dem früher beschriebenen Blendensichtmesser ausgeführt, indem ich das Instrument mit Beibehaltung derselben Irisblende für 4 konstante Rohrlängen, statt wie bisher für 2, einrichtete. Das Ergebnis dieser Messungen ist in Fig. 2 graphisch dargestellt; d bezeichnet den offenen Blendendurchmesser in Millimeter, A den zentralen Abstand von der Blende zur matten Glasoberfläche in Millimeter, a die Filterzahl des Normalstufensichtmessers. Jeder Punkt stellt das Mittel aus mehreren (meist 3) Einzelbeobachtungen dar. Die Kurven sind graphisch ausgeglichen. Die Meßgenauigkeit ist aus der Streuung der Punkte zu ersehen.

3. **Gesetz der Mattglastrübung.** Faßt man sämtliche Beobachtungen für die vier Rohrlängen zusammen, indem man aus Blendenöffnung d und Rohrlänge A den räumlichen Öffnungswinkel ω berechnet und diesen als

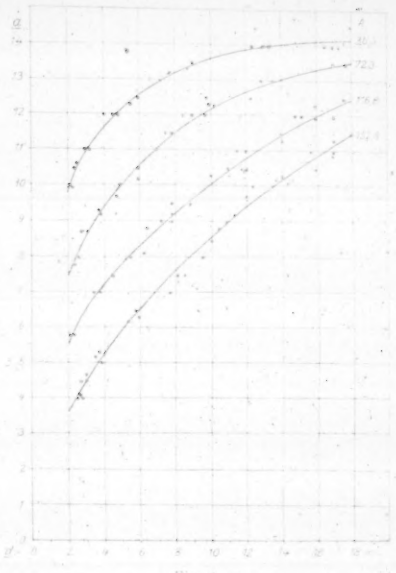


Fig. 2.

Funktion von a graphisch darstellt (Fig. 3), so erhält man eine Kurve, die ersehen läßt, wie sich die Trübung mit der Filterzahl a ändert. Denn da wir die Mattglastrübung als durch die zerstreute Lichtstärke oder, durch die dieser proportionale Beleuchtungsstärke des Mattglases gegeben ansehen können, so ist der Öffnungswinkel ω ein relatives Maß der Mattglastrübung.

Nimmt man das zentrale Flächenelement der Mattscheibe im Blendensichtmesser, durch welches hindurch stets beobachtet wird, als Scheitel des räumlichen Winkels ω des Lichtkegels, so berechnet man ω aus A und d nach bekannten geometrischen Beziehungen aus der Formel:

$$\omega = 2\pi\left(1 - \frac{A}{\sqrt{A^2 + \frac{d^2}{4}}}\right).$$

Die in Fig. 3 eingetragenen Zahlenwerte sind aus den ausgeglichenen Kurven der Fig. 2 entnommen. Sie fügen sich gut zu einer gemeinsamen Kurve zusammen. Jedoch ist eine systematische Abweichung der einzelnen 4 A-Reihen voneinander zu erkennen, die bei den kleineren a-Werten die Grenze der Beobachtungsfehler zu überschreiten scheint und sich darin äußert, daß bei gleichem $\omega/2\pi$ dem größeren A ein kleinerer

[1]) E. Liebenthal, l. c.

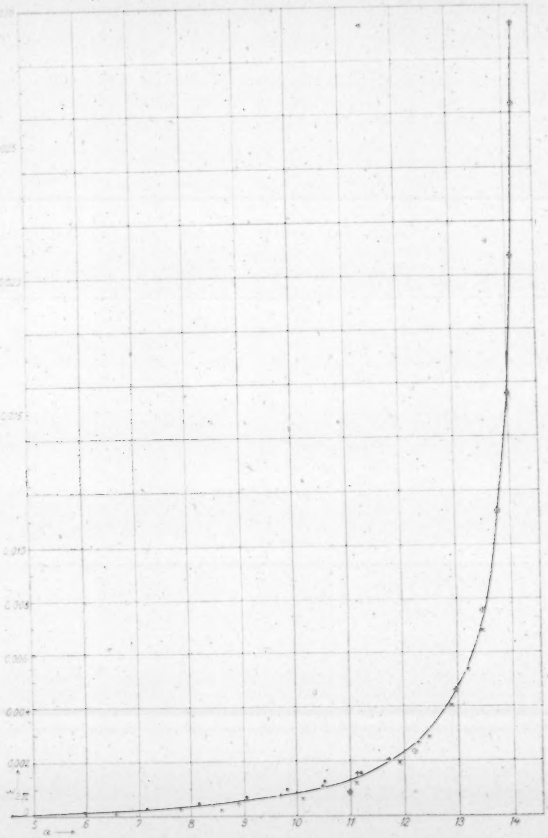


Fig. 3.

a-Wert entspricht. Die Punkte der 4 A-Reihen sind so bezeichnet:

● $A = 152{,}8$ mm
+ $A = 116{,}8$ „
× $A = 72{,}3$ „
⊕ $A = 36{,}3$ „

Wahrscheinlich liegt diesem Befund kein reeller Vorgang bei der Lichtzerstreuung im Mattglase zugrunde, sondern die Abweichungen sind dadurch entstanden, daß die Kurven der Fig. 2 in ihrem stärker gekrümmten unteren Teile den wahren Verlauf nicht ganz richtig darstellen, sei es wegen unvollkommener graphischer Ausgleichung oder weil dort die Beobachtungen wegen der geringeren Lichtstärke im Instrument weniger genau sind als für den oberen Teil der Kurven. Diese kleinen Abweichungen sind jedoch zunächst für die allgemeinen Folgerungen zum Gesetz der Mattglastrübung nicht von Belang.

Wenn sich die seitliche Intensitätsabnahme des zerstreuten Lichts nach Fig. 1 bei den größeren ω-Werten für die aus der Nähe des Blendenrandes kommenden Strahlen bemerkbar machen würde, so wäre die Proportionalität der Mattglastrübung oder der durchgelassenen zerstreuten Lichtstärke mit der durch die Größe des Öffnungswinkels ω gemessenen Beleuchtungs-

stärke nicht streng gültig. Die Menge des ins Auge gelangenden zerstreuten Lichts und damit die Mattglastrübung würde dann langsamer als proportional ω zunehmen, und die Kurve der Mattglastrübung hätte in ihrem obersten Teile einen weniger steilen Verlauf als die vorläufig mit ihr identifizierte Kurve der Beleuchtungsstärke in Fig. 3. Bei relativ kleinem ω bleibt man aber mit dem visierenden Auge für alle Strahlen, die von der Blende her die Mattscheibe treffen, im Bereiche der annähernd sphärischen Vorderfront der durch die Kurve der Fig. 1 schematisch dargestellten Intensitätsverteilungsfläche, so daß dann unabhängig von den kleinen Unterschieden der Richtung, aus der das Mattglas beleuchtet wird, für die Aufhellung und damit für die Trübung nur die Größe von ω maßgebend sein wird. Ob man mit dem im Blendensichtmesser verwendeten größten ω über den sphärischen Bereich hinaus bereits in das Gebiet der seitlichen Intensitätsabnahme des zerstreuten Lichts gelangt, ist zunächst wegen fehlender genauerer Angaben über die Kurve der Fig. 1 nicht zu entscheiden, jedoch nach den im vorigen Abschnitt mitgeteilten Versuchen mit Winkeländerungen für die das Mattglas beleuchtenden Strahlen wenig wahrscheinlich, so daß zur ersten Orientierung diese Möglichkeit weiterhin außer Betracht bleiben soll.

Eine analytische Form für die durch die Kurve der Fig. 3 dargestellte Abhängigkeit der Mattglastrübung von der Anzahl der aufeinandergelegten Gläser zu finden, ist mir bisher nicht gelungen. Einige Versuche in dieser Richtung seien hier kurz mitgeteilt.

Daß die Trübung nicht proportional der Filterzahl ist, wie es bei der Einführung der linearen a Skala als Näherung früher angenommen wurde, folgt unmittelbar aus der gekrümmten Form der Kurve. Allenfalls könnte man bei den kleinsten und größten a-Werten von angenäherter Proportionalität sprechen; jedoch sind gerade die mittleren a-Werte, bei denen die Kurve stark gekrümmt ist, für die Sichtmessungen am wichtigsten.

Die nächstliegende weitere Annahme wäre ein logarithmischer Zusammenhang zwischen Trübung und Filterzahl nach Analogie des Absorptionsgesetzes:

$$\frac{d\omega}{\omega} = k\,da.$$

Dann würde für zwei beliebige Kurvenpunkte 1 und 2 die Formel:

$$\lg\frac{\omega_2}{\omega_1} = k\,(a_2 - a_1)$$

gelten, und k müßte eine Konstante sein. Die Tabelle zeigt, daß dies nicht der Fall ist; k hat einen ausgesprochenen Gang. Die a-Skala ist also nicht logarithmisch.

$\frac{\omega}{2\pi}$	a	k (logarithmisch)	a_m (hyperbolisch)
0,0001	5,33	0,201	9,67
0,0005	8,80	0,182	12,10
0,0010	10,45	0,232	13,05
0,0020	11,75	0,271	13,70
0,0030	12,40	0,312	14,05
0,0040	12,80	0,352	14,20
0,0060	13,30	0,500	14,30
0,0080	13,55	0,645	14,30
0,0100	13,70	0,705	14,45
0,0150	13,95	0,90	14,45
0,0200	14,08	1,22	14,50
0,0280	14,20		

Ferner wird durch die Kurvenform die Vermutung nahegelegt, daß es sich um eine gleichseitige Hyperbel handle, deren Asymptoten die a-Achse

$$y = \frac{\omega}{2\pi} = 0$$

und die durch den Maximalwert a_m von a, dem die Kurve zustrebt, gegebene Achse

$$x = a_m - a = 0$$

sind. a_m ist eine Konstante und hat nach zahlreichen Messungen mit dem Stufensichtmesser den Wert 14,3. Nach dieser Annahme wäre:

$$\frac{\omega}{2\pi}(a_m - a) = \text{konst.}$$

zu setzen; d. h. die Aufhellung (Trübung) des Mattglases bei der Filterzahl a ist umgekehrt proportional der zur Erreichung der maximal getrübten Filterzahl a_m noch fehlenden Filterzahl $(a_m - a)$. Nimmt man wieder zwei beliebige Punkte 1 und 2 der Kurve zur Prüfung der Formel, so wäre:

$$\frac{\omega_1}{2\pi}(a_m - a_1) = \frac{\omega_2}{2\pi}(a_m - a_2),$$

und die Konstante:

$$a_m = \frac{a_1\omega_1 - a_2\omega_2}{\omega_1 - \omega_2}$$

müßte für jedes Punktpaar der ganzen Kurve denselben Wert haben. Wie aus der Tabelle zu ersehen ist, hat aber das so berechnete a_m einen ausgesprochenen Gang; von einer Konstanz könnte man allenfalls oberhalb $a = 13{,}5$ sprechen, was aber für die Sichtmessung nicht in Betracht kommt, da die mit a-Werten oberhalb 13 berechneten Sichtwerte zu ungenau werden. Die a-Skala ist also auch nicht hyperbolisch.

Durch die Kenntnis der analytischen Form des Gesetzes der Mattglastrübung würde man in Verbindung mit den entsprechenden Gesetzen der atmosphärischen Trübung voraussichtlich zu einer strengen Lösung des Problems der Sicht-

berechnung aus Sichtmesserbeobachtungen gelangen können. Von weiteren Versuchen in dieser Richtung habe ich jedoch vorläufig abgesehen. Eine qualitative Überlegung (Abschnitt 4) und die empirische Bestimmung der Korrektion für die Sichtformel (Abschnitt 5) führen zu einer zwar nur angenäherten, aber doch hinreichend genauen Sichtberechnung.

4. **Qualitative Betrachtung zur Korrektur der Sichtmesserformel.** Die durch Fig. 3 gegebene Änderung der Mattglastrübung mit der Filterzahl soll verglichen werden mit dem Verhalten der durch Nebel oder Dunst bewirkten Trübung der Luft bei Änderung der Schichtdicke.

Die Trübung der Luft äußert sich einerseits darin, daß das betrachtete Ziel durch die trübenden Teilchen teilweise abgedeckt wird; die Teilchen haben eine Schattenwirkung für das vom Ziel kommende Licht. Man kann diesen Effekt in einem erweiterten Sinne als „Absorption" bezeichnen.

Andererseits beruht die Lufttrübung bei Tage (wie die Mattglastrübung überwiegend) auf der durch Lichtzerstreuung bewirkten Aufhellung des Mediums, woran sowohl das Sonnenlicht, wie das indirekte Tageslicht beteiligt ist.

Für die Änderung beider Wirkungen, der Abdeckung und der Aufhellung, mit der Schichtdicke liegen zahlreiche theoretische und experimentelle Untersuchungen vor. Wir entnehmen daraus für unsere Betrachtungen das folgende Ergebnis:

Sieht man von der Aufhellung ab und beschränkt sich auf die Abdeckung, so befindet man sich in befriedigender Übereinstimmung mit der Erfahrung für Dunst (Aitken[1]) und Nebel (Conrad, Richardson[2]), wenn man bei konstanter Größe und Anzahl der trübenden Teilchen pro Volumeneinheit die Trübung proportional der Luftstrecke setzt. Dabei liegt die in Wirklichkeit zutreffende Annahme zugrunde, daß der Teilchenabstand groß ist gegen die Teilchengröße.

Nimmt man allein die Aufhellung, so ergibt sich gleicherweise für Dunst und Nebel gemäß der Rayleighschen Theorie der Lichtzerstreuung in der Atmosphäre und dem Extinktionsgesetz, daß bei konstanter Größe und Anzahl der trübenden Teilchen pro Volumeneinheit die als zerstreute Lichtmenge gemessene Trübung exponentiell mit der Luftstrecke zunimmt[3]), d. h. zunächst für kleine Schichtdicken nahezu proportional und dann verzögert mit der Schichtdicke wächst. Die Kurve dieser Lufttrübung, in derselben Weise gezeichnet wie die Kurve der Mattglastrübung in Fig. 3, ist also anfangs geradlinig und später nach rechts konkav, wogegen die für Mattglas nach rechts konvex ist.

Da es sich bei der Verwendung des Sichtmessers um die Erkennbarkeit nicht selbstleuchtender Objekte durch die getrübte Luft hindurch handelt, kommen nur relativ kleine Schichtdicken in Frage, so daß sich unsere Betrachtungen jedenfalls auf den geradlinigen und schwach gekrümmten Anfangsteil der Kurve beschränken können. Das gilt auch für die Änderung der Abdeckung (Absorption) mit der Schichtdicke, die bei relativ größeren Schichtdicken gemäß dem Absorptionsgesetz denselben nach rechts konkaven Kurventypus zeigen muß wie die Lichtzerstreuung.

Für die Aufhellungstrübung von Dunst und Nebel gilt zwar qualitativ derselbe Kurvenverlauf. Eine quantitative Übereinstimmung der Kurven ist jedoch nicht zu erwarten, da die trübenden Teilchen nach Größe, Art und Form sehr verschieden für Dunst und Nebel sind. Bei der experimentellen Prüfung der Sichtmesserformel für Dunst und Wassernebel ist das bestätigt worden (vgl. Abschnitt 5).

Wir haben also für trübe Luft und für Mattglas ein qualitativ ganz verschiedenes Verhalten der Trübung bei zunehmender Schichtdicke bzw. Filterzahl: für Luft lineare oder etwas verzögerte Zunahme der Trübung mit der Schichtdicke, bei Mattglas beschleunigte Zunahme der Trübung mit der Filterzahl. Dem ist Rechnung zu tragen, wenn bei der Sichtmessung eine aufbekannter Strecke gegebene Lufttrübung durch meßbare Mattglastrübung zu dem konstanten maximalen Trübungswert ergänzt und auf die Strecke 1 reduziert werden soll.

Man könnte das etwa so machen, daß man die Skala der Mattglastrübung so teilt, daß sie für die Zunahme ihrer Trübung die Bezeichnung nicht der Anzahl der aufeinandergelegten Mattgläser, sondern der entsprechenden Luftstrecken trägt und dadurch dem Kurvenverlauf der Lufttrübung angepaßt ist; man würde dann die Reduktion der Lufttrübung auf die Streckeneinheit nach dieser Kurve vornehmen, was, wenn

1) A. Wigand, Ann. d. Phys. **59**, 729—730 und 741—742, Nachtrag 1, 1919. (Auf S. 729, Zeile 12—13, ist statt „freibleibenden Zielfläche" zu setzen: „freien Zielfläche ohne Abdeckung".)

2) W. Trabert, Meteor. Zeitschr. **18**, 518, 1901; A. Defant, Ann. d. Hydr. u. marit. Met. **47**, 65, 1919; L. F. Richardson, Meteor. Zeitschr. **39**, 28, 1922.

3) Chr. Wiener, Nova acta Halle **73**, 1, 1900, 91, 81, 1900; J. M. Pernter u. F. M. Exner, Meteorologische Optik, S. 650—664, Wien u. Leipzig 1910; G. Haecker, Diss. Kiel 1905; Meteor. Zeitschr. **22**, 343, 1905; L. Weber, Ann. d. Phys. **51**, 427, 1916; R. Mecke, Ann. d. Phys. **65**, 257, 1921 (Fig. 2).

man sie als geradlinig ansehen darf, durch Division mit der Streckenlänge geschehen könnte. Aber abgesehen von den großen praktischen Schwierigkeiten, eine so geteilte Mattglasskala herzustellen und zu reproduzieren, würde man dann auch für Nebel und Dunst verschiedene Mattglasskalen brauchen, da die Kurven für Nebel- und Dunsttrübung zwar qualitativ in der Kurvenform, nicht aber quantitativ in ihrem Verlaufe übereinstimmen; und für das breite Grenzgebiet zwischen Dunst und Nebel, mit dem man es häufig zu tun hat, wäre man im Zweifel, welche Skala zu verwenden sei.

Der bequemere Weg ist entschieden die empirische Ermittelung einer Korrektion zu der anfangs eingeführten linearen S-Formel. Und die theoretischen Betrachtungen dieses Abschnitts sollen zunächst eine Orientierung über die Art dieser Korrektion geben, während die Bestimmung ihrer Zahlenwerte im nächsten Abschnitt mitgeteilt wird.

Die einfache S-Formel fußt auf der Annahme linearer Abhängigkeit der Trübung von der Schichtdicke für beide Medien, trübe Luft und Mattglas. Wir halten jetzt für Luft den geradlinigen Kurvenverlauf fest, legen aber für Mattglas die nach links konkave Trübungskurve der Fig. 3 zugrunde. Dann bedarf die Ablesung a an der hinsichtlich der Filterzahl linearen Mattglasskala einer Korrektion, damit man die nach der Mattglasskala gemessene Lufttrübung nun durch Division mit der Schichtdicke auf die Zielentfernung l reduzieren und so nach der einfachen Formel den S-Wert angeben kann.

Über die Art dieser a-Korrektion läßt sich durch folgende Überlegung etwas aussagen:

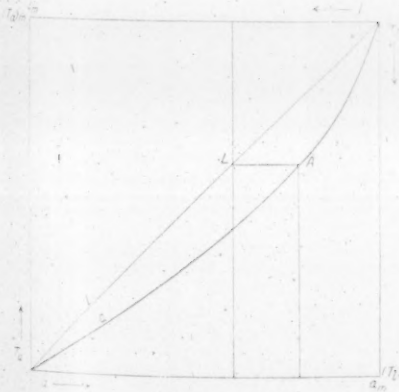


Fig. 4.

Fig. 4 stelle schematisch die beiden Trübungskurven dar, und zwar die Mattglaskurve mit dem Nullpunkt links unten, die Luftkurve mit dem Nullpunkt rechts oben. Abszissen sind die Filterzahl a für Mattglas und die Luftstrecke l, wobei die Einheit für l je nach der Dichte des Nebels oder Dunstes verschieden ist, jedoch stets so gesetzt wird, daß in der graphischen Darstellung für die zum Verschwinden des Ziels gerade eben nötige maximale Trübung $a_m = l_m$ wird. Die größte Höhe der Ordinate stellt diesen maximalen Trübungsgrad T_m dar, für Mattglas bezeichnet mit $(T_a)_m$, für Luft mit $(T_l)_{m}$; nach Voraussetzung ist $(T_l)_m = (T_a)_m$. Die beiden Trübungskurven gehen jede durch den Nullpunkt der anderen, da die Meßmethode darauf beruht, daß für ein Ziel, das sich in der Entfernung l_m mit maximaler Lufttrübung $(T_l)_m$ befindet, die Filterzahl $a = 0$ und für ein Ziel mit der Entfernung $l = 0$ die Filterzahl $a = a_m$ mit maximaler Filtertrübung $(T_a)_m$ eingestellt wird.

Gehe ich nun von einem beliebigen l-Wert aus, so stellt mir die Länge der Ordinate von der l-Achse (oben) bis zum Punkte L herab die zugehörige Lufttrübung T_l dar. Wäre die Mattglaskurve mit der Luftkurve identisch, so würde die zur Ergänzung auf den Wert T_m erforderliche Mattglastrübung T_a durch die Ordinate vom Punkt L bis zur a-Achse (unten) herab geliefert, und wir hätten $l + a = a_m = l_m$. Da aber die a-Kurve rechts von der l-Kurve verläuft, finden wir erst durch Horizontalgehen nach rechts hin bis zum Punkte A denjenigen a-Wert, der uns die zur Ergänzung des T_l auf T_m erforderliche Ordinate T_a liefert, und der demnach mit dem Sichtmesser eingestellt wird. Dieser gemessene a-Wert ist aber größer als der durch den Punkt L gegebene, so daß wir das gemessene a um den Betrag AL verkleinern müssen, wenn wir mit Linearität auch der a-Kurve rechnen wollen. Die Korrektion, um die man die mit dem Sichtmesser gemessene Zahl a verkleinern muß, um mit der linearen S-Formel rechnen zu können, wird also dargestellt durch den horizontalen Abstand der beiden Trübungskurven in Höhe des durch die Zielentfernung l auf der Luftkurve gegebenen Trübungswertes. Um nähere Angaben über die Eigenschaften dieser a-Korrektion machen zu können, hatte man über die schematische Betrachtung der Form der Trübungskurven hinaus auf ihren wirklichen quantitativen Verlauf einzugehen.

5. Die Korrektur der Sichtmesserformel.

Wie diese Korrektion am zweckmäßigsten in die Sichtmesserformel einzuführen ist, und welche Zahlenwerte ihr zukommen, habe ich folgendermaßen empirisch aus Sichtmessungen bestimmt:

Die bereits im ersten Abschnitt kurz erwähnten Sichtmessungen mit Variierung der Zielentfernung bis etwa zum Verhältnis 1:10 hat auf meine Veranlassung Herr K. Genthe in den letzten Monaten von 1921 ausgeführt; sie sollen in seiner Dissertation, die als Aufgabe die Anwendung des Sichtmessers auf die Vertikalsicht hat, ausführlicher mitgeteilt werden. Es sind 24 Versuchsreihen mit durchschnittlich je 7 Zielentfernungen bei Dunst und Wassernebel und allen Graden der Lufttrübung von klarer Fernsicht bis zu dichtem Nebel ausgeführt worden.

In den Fig. 5 und 6 sind zwei herausgegriffene Beispiele dargestellt. Die oberen Kurven stellen das typische Verhalten des nach der einfachen linearen Formel berechneten Wertes für S dar: S nimmt mit der Entfernung l des Ziels zu. Wenn das in einzelnen Fällen für benachbarte Punkte oder auch für eine größere Zahl von Zielentfernungen einer Reihe nicht eintrat, so konnte fast durchweg die Ursache dafür in lokalen Anomalien der Lufttrübung oder in abweichender Beschaffenheit der Ziele festgestellt werden.

Mehrere Ansätze wurden für eine Korrektur der S-Formel probiert in der Absicht, die Neigung der S-Kurve zu beseitigen, so daß der korrigierte Sichtwert unabhängig von l wird. Als einfachster mit gleicher Form und nur verschiedenem Zahlenwerte der einzigen Korrektionskonstante σ für Dunst und Nebel ergab sich folgender:

$$S_\sigma = \frac{l}{a_\infty - a} - \sigma l.$$

Unter Zugrundelegung des Wertes $a_\infty = 14{,}3$ wurde aus je 2 Beobachtungen mit verschiedenem l in derselben Versuchsreihe durch Gleichsetzung von S_σ nach dieser Formel σ berechnet mit dem Ergebnis merklicher Konstanz innerhalb der Reihe und auch in verschiedenen Reihen mit veränderter Sicht. Für die Dunstreihen hat σ jedoch einen anderen Wert als für die Nebelreihen. Die 533 einzelnen σ-Werte gruppieren sich gut und nahe um folgende Mittelwerte für Dunst:

$$\sigma = 0{,}07,$$

für Wassernebel:

$$\sigma = 0{,}04.$$

Der σ-Wert für „Dunst" gilt auch für klare Fernsicht bei nur geringer Dunststärke; denn eine wenn auch nur schwache Dunsttrübung der Luft ist beim klarsten Wetter vorhanden. Als bequemer, für Dunst und Nebel gemeinsamer Mittelwert zur angenäherten Sichtberechnung kann der Wert $\sigma = 0{,}05$ gesetzt werden, der auch für die Übergänge zwischen Dunst und Nebel in Zweifelsfällen anzuwenden ist.

Die unteren Kurven der Fig. 5 und 6 zeigen, daß die σ-Korrektur die Neigung der S-Kurve beseitigt, ohne eine Krümmung hineinzubringen. Die S_σ-Kurven verlaufen im Mittel horizontal, und S_σ ist von der Zielentfernung l praktisch unabhängig, so daß man nun einen Mittelwert S_σ für mehrere Zielentfernungen angeben kann.

Die noch bestehenbleibenden Schwankungen um den so berechneten Mittelwert von S_σ beruhen auf zwei Ursachen: Erstens können Unregelmäßigkeiten der Dunst- und Nebeldichte

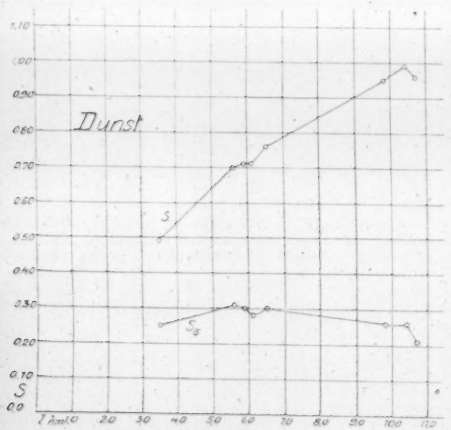


Fig. 5.

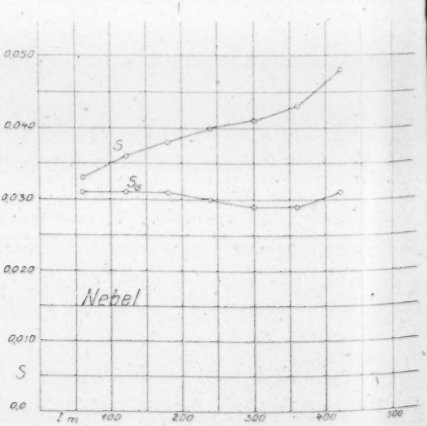


Fig. 6.

vorliegen, sowohl örtliche (Schwadenbildung) wie auch während der Dauer der Messungen auftretende zeitliche; zweitens zeigt mitunter die Beschaffenheit der Ziele individuelle Unterschiede, so daß einzelne Ziele wegen verschiedener Form, Größe oder Färbung ceteris paribus besser oder schlechter erkennbar sind als die normalen Ziele. Im ersteren Falle sind die S_a-Schwankungen reell und stellen neben dem S_a-Mittelwert ein für die Sicht charakteristisches Messungsergebnis dar, nämlich den Betrag der örtlichen oder zeitlichen Veränderlichkeit. Im zweiten Falle handelt es sich um eine der Methode anhaftende Unvollkommenheit, die gelegentlich zu eben merklichen Fehlern führen, aber dadurch beseitigt werden kann, daß man für solche abnorme Ziele der individuellen Zielbeschaffenheit durch einen Korrektionsfaktor Rechnung trägt, mit dem alle S_a-Werte zu multiplizieren sind, die aus Messungen mit dem betreffenden Ziele gewonnen wurden.

Die Gleichung für S_a läßt sich auch so schreiben:

$$S_a = l \cdot \frac{1 - (a_m - a)\,\sigma}{a_m - a},$$

oder die korrigierte, auf die Einheit der Luftstrecke reduzierte Lufttrübung ist:

$$T_a = \frac{1}{S_a} = \frac{1}{l} \cdot \frac{a_m - a}{1 - (a_m - a)\,\sigma}.$$

Die σ-Korrektur besteht also darin, daß der Betrag von $(a_m - a)$ vergrößert wird durch Division mit einem von a abhängigen Faktor, der < 1 ist. Einer Vergrößerung von $(a_m - a)$ entspricht aber eine Verkleinerung von a um denselben absoluten Betrag. Die am Schluß von Abschnitt 4 aus den Trübungsgesetzen abgeleitete Forderung wird also von der σ-Korrektur erfüllt.

Da der Verlauf der Trübungsänderung mit der Schichtdicke bei Dunst und Nebel quantitativ etwas verschieden, wenn auch qualitativ ähnlich ist, haben wir bei formaler Gleichheit der σ-Korrektion für Dunst und Nebel verschiedene Zahlenwerte der Konstanten σ.

Will man aus dem so gefundenen Sichtwert S_a die Sichtweite berechnen, so verfährt man folgendermaßen: „Sichtweite" im üblichen Sinne ist diejenige Entfernung, in der das Ziel gerade noch erkennbar ist, gemessen in Kilometern. Soll ein Ziel von der Entfernung der Sichtweite mit dem Sichtmesser zum Verschwinden gebracht werden, so wird man nur das Mattfilter vom Trübungsgrad 1 vorzuschalten haben, also $a = 1$ einstellen. In die Sichtmesserformel ist daher $a = 1$ und für l die Sichtweite in Kilometern einzusetzen, so daß man erhält:

$$S_a = \text{Sichtweite} \times \left(\frac{1}{14.3 - 1} - \sigma\right) =$$
$$= \text{Sichtweite} \times (0.075 - \sigma).$$

Also ist für Dunst:

$$\text{Sichtweite} = \frac{S_a}{0.005},$$

für Nebel:

$$\text{Sichtweite} = \frac{S_a}{0.035}.$$

Diese Formeln treten jetzt an Stelle der bisher benutzten ungenaueren Beziehung ohne die σ-Korrektion:

$$\text{Sichtweite} = \frac{S_a}{0{,}075}.$$

6. Anwendungen der korrigierten Sichtmesserformel. Der von der Zielentfernung unabhängige Sichtwert S_a ist für zahlreiche Anwendungen geeignet. Ich erwähne hier nur drei naheliegende Fälle.

Man kann bei bekanntem S_a mit einer Sichtmessung die Entfernung des Ziels bestimmen, was bei Nebel mit gutem Erfolg von Dannmeyer[1]) ausgeführt wurde und für nautische Distanzbestimmungen von praktischem Wert ist.

Zur Bestimmung der Vertikalsicht ist für einen größeren Höhenbereich bei gleichbleibendem Ziel die Zielentfernung in sehr weiten Grenzen zu verändern. Um dabei brauchbare Ergebnisse zu bekommen, muß man eine einigermaßen genaue Sichtmesserformel wie die S_a-Formel verwenden. Ich führe zurzeit zusammen mit Herrn K. Genthe solche Untersuchungen über die Vertikalsicht aus.

Das Studium der physikalischen Gesetze der Sicht ist mit Verwendung des Sichtmessers und der S_a-Formel möglich. Als für Theorie und Praxis der Sichtmessung wichtigsten Zusammenhang habe ich zunächst den zwischen Sicht und Beleuchtungsrichtung in Angriff genommen. Fig. 7 zeigt schematisch das Ergebnis einiger gemeinsam mit Herrn L. Heberer für Dunst im Binnenlande ausgeführter Versuche, aus denen sich bereits in den Hauptzügen dieser Zusammenhang ersehen läßt. Für quantitative Angaben, wie sie zur Reduktion von Sichtwerten bei beliebiger Beleuchtungsrichtung auf den Sichtwert bei einer als normal festgesetzten Richtung erforderlich wären, reichen die bisherigen Versuche noch nicht aus. Die Kurve stellt die vom Kreiszentrum aus nach allen Richtungen hin bei der durch den Pfeil gegebenen Richtung der Sonnenstrahlung gemessenen Sichtwerte in

1) F. Dannmeyer, Schiffahrtszeitschrift „Hansa" (Hamburg) 59. Nr. 22. S. 655. 1922.

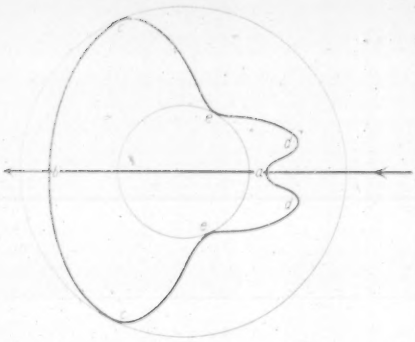


Fig. 7.

relativem Maße dar, also die Sicht als Funktion des Azimuts vom Sonnenvertikal aus; die Sonnenhöhe wurde zunächst nicht berücksichtigt. Die Beobachtungen sind für eine größere Zahl von Tageszeiten und Tagen mit verschiedener Wetterlage und Sicht gemittelt worden.

Vergleicht man Fig. 7 mit der bekannten Abhängigkeit der Lichtzerstreuung von der Strahlrichtung, wie sie allgemein für die atmosphärischen Trübungen von Chr. Wiener[1]) theoretisch untersucht und für Wassernebel mit den Wienerschen Zahlenwerten in Fig. 1 der Arbeit von R. Mecke[2]) anschaulich dargestellt ist, so sieht man sofort, daß das starke Minimum a und das schwächere Minimum b der Sicht auf den entsprechenden großen und kleinen Maximis der Streustrahlung in der Strahlrichtung nach vor- und rückwärts beruhen, und daß die Sichtmaxima c quer zur Beleuchtungsrichtung durch die Minima der Streustrahlung in dieser Richtung bewirkt werden. Denn einem Maximum der Streustrahlung und der durch sie bewirkten Aufhellung des trüben Mediums in einer bestimmten Richtung muß ein Minimum der Sicht entsprechen, und umgekehrt. Das deutliche Auftreten und Überwiegen dieser vier Extrema in der Sichtverteilungskurve beweist daher, daß die Aufhellung des Mediums für die Sicht eine führende Rolle spielt.

Die Sichtmaxima d in Richtungen, die nur um einige Grade von der Richtung auf die Sonne zu abweichen, bedürfen noch der Erklärung. Mit ihnen scheint übereinzustimmen, daß Späth[1]) bei dunstigem Wetter auf dem Meere nach der Sonne hin verhältnismäßig gute Sicht beobachtet hat.

Auch für die Sichtminima e ist die Ursache noch unbekannt. Sie geben die Richtung mit dem kleinsten Sichtwert an, der den kleinen Sichtwert direkt auf die Sonne zu noch unterschreitet, und sind daher besonders auffallend und praktisch wichtig.

1) Chr. Wiener, l. c. (1. Abhandlung) S. 111 (Fig. 16), S. 258 (Fig. 70), S. 259 (Fig. 71).
2) R. Mecke, l. c. S. 258.

Zusammenfassung.

1. Zur besseren Ausnutzung der Meßgenauigkeit der Sichtmessermethode wird eine korrigierte Formel angegeben, nach der sich der für verschieden entfernte Ziele beobachtete Sichtwert unabhängig von der Entfernung des Ziels ergibt.

2. Diese Korrektur ist begründet durch die Verschiedenheit der Gesetze, nach denen sich die Trübung der Luft und des im Sichtmesser verwendeten Mattglases mit der Schichtdicke bzw. mit der Anzahl der aufeinandergelegten Mattgläser ändert.

3. Das Gesetz der durch diffuse Aufhellung erzeugten Trübung des Mattglases wird durch Versuche gefunden, die hauptsächlich in vergleichenden Sichtmessungen mit dem Stufensichtmesser und dem Blendensichtmesser bestehen.

4. Die korrigierte Sichtmesserformel wird bei weitgehender Variierung der Zielentfernung durch Sichtmessungen bei Dunst und Nebel gewonnen.

5. Das Ergebnis von Versuchen über die Abhängigkeit der Sicht von der Beleuchtungsrichtung wird mitgeteilt.

1) W. Späth, „Das Wetter" 1919, S. 169; A. Schmauß, „Das Wetter" 1920, S. 96.

Halle a. S., Physikalisches Institut der Universität, im Juni 1922.

(Eingegangen 6. Juni 1922.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Die Bedingungen der Möglichkeit einer Maßbestimmung in einer physikalischen Mannigfaltigkeit und das Prinzip der Ähnlichkeit.

Von Fritz London.

(Fortsetzung und Schluß.)

Kap. II. Die Dimension einer physikalischen Mannigfaltigkeit.

§ 8. Die analytischen Dimensionsbeziehungen.

Wir haben nunmehr die Mittel in der Hand, um den Begriff der Dimension einer physikalischen Mannigfaltigkeit in aller Schärfe zu formulieren. Es zeigt sich, daß man auch hier nicht zu klarer Einsicht gelangt, solange nicht präzise geschieden wird, was konventionell und was eine Eigenschaft der Gegenstände ist.

Sind $x_1, x_2, x_3 \dots x_k$ verschiedene Maßmannigfaltigkeiten, die sämtlich auf einem der oben auseinandergesetzten Prinzipe ihre Maßbestimmungen erhalten haben, so können wir von diesen (Grund-)Variablen ausgehend eine neue abgeleitete Variable x_{k+1} konstruieren — gleichgültig, ob die betreffende Größe eine physikalische Bedeutung hat —, indem wir sie durch

$$x_{k+1} = f(x_1, x_2 \dots x_k) \qquad (1)$$

von den Grundvariablen abhängig machen.

Die neue Variable besitzt eine metrische Bestimmung, welche durch (1) mit den Maßbestimmungen der Grundvariablen $(x_1, x_2 \dots x_k)$ verbunden ist. Die Maßbestimmungen der Grundvariablen sind durch die Prinzipe des Kap. I definiert nur bis auf eine Substitution

$$x_i^* = \xi_i x_i \qquad \xi_i > 0 \text{ (für } i = 1, 2, 3 \dots k), \qquad (2)$$

in welcher die Willkürlichkeit der Einheit noch offen blieb. Gehen wir durch (2) zu einer gleichwertigen Maßbestimmung derselben Mannigfaltigkeit über, so sind die prinzipiellen Eigenschaften der Maßskala x_i ungeändert, nur die konventionelle Einheit ist durch eine $\frac{1}{\xi_i}$ mal so große ersetzt.

Wir bemerken, daß übrigens nur für die stetigen Mannigfaltigkeiten dieser Übergang möglich ist, ohne invariante Eigenschaften zu zerstören. Diskrete Mannigfaltigkeiten, die ihre Maßbestimmung vollständig schon in sich tragen, seien zunächst ausgeschlossen.

Transformieren wir die Grundvariablen x_i durch einen Einheitenwechsel nach (2), so wird die nach (1) von diesen abgeleitete Variable x_{k+1} sich ebenfalls ändern, und zwar sei

$$x_{k+1}^* = f(\xi_1 \cdot x_1, \xi_2 \cdot x_2, \xi_3 \cdot x_3, \dots \xi_k \cdot x_k).$$

Der Übergangsfaktor von x_{k+1}, d. h. also

$$\xi_{k+1} = \frac{x_{k+1}^*}{x_{k+1}} = \frac{f(\xi_1 \cdot x_1, \xi_2 \cdot x_2, \xi_3 \cdot x_3, \dots \xi_k \cdot x_k)}{f(x_1, x_2, x_3 \dots x_k)}$$

wird im allgemeinen keine Konstante sein, deren Größe nur von den ξ_i abhängt, vielmehr wird ξ_{k+1} im allgemeinen auch von den x_i und infolgedessen auch von x_{k+1} abhängig sein. Das aber bedeutet, daß für die Mannigfaltigkeit x_{k+1} durch die physikalischen Maßprinzipe der $x_1, x_2 \dots x_k$ und durch (1) keine Maßbestimmung definiert ist, da jede andere Maßeinheit der Grundvariablen, die vermöge (2) gleichwertig ist, eine neue Metrik x_{k+1}^* definiert, die nicht durch eine lineare Substitution aus der alten hervorgeht.

Verlangen wir, daß das physikalische Maßprinzip der Grundvariablen eine Maßbestimmung der abgeleiteten Variablen vollständig (d. h. bis auf die konventionelle Einheit in x_{k+1}) definiere, so darf das ξ_{k+1} nicht von den x_i, sondern nur von den ξ_i abhängen. Das aber bedeutet, daß die Funktionalgleichung gelten muß:

$$\left.\begin{aligned} \xi_{k+1} &= \frac{f(\xi_1 x_1, \xi_2 x_2, \xi_3 x_3, \dots \xi_k x_k)}{f(x_1, x_2, x_3 \dots x_k)} \\ &= \varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3 \dots \xi_k), \end{aligned}\right| \qquad (3)$$

welches nichts als eine Verallgemeinerung der Funktionalgleichung (4) im Kap. I auf k Variable darstellt. Sie läßt sich durch spezielle Wahl der ξ_i auf ein System von k partiellen Differentialgleichungen analog wie (5) Kap. I zurückführen, deren Integration unter Berücksichtigung der Randbedingungen wie oben für φ ergibt:

$$\xi_{k+1} = \varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3 \dots \xi_k) = \xi_1^{\alpha_1} \cdot \xi_2^{\alpha_2} \cdot \xi_3^{\alpha_3} \cdots \xi_k^{\alpha_k}. \qquad (4)$$

Wir erhalten also das merkwürdige Resultat, daß, wenn die neue Variable eine Maßbestimmung allein durch die Maßbestimmungen der stetigen Grundvariablen erhalten soll, schon die Form der Beziehung zwischen den Übergangsfaktoren sehr weitgehend eingeschränkt ist. An und für sich würde jede willkürliche Funktion

$$\xi_{k+1} = \varphi(\xi_1, \xi_2 \dots \xi_k)$$

genügen, um die Abhängigkeit der neuen Maßbestimmung x_{k+1} von der konventionellen Maßeinheit zu regeln. Es ist aber nur dann möglich, zwischen den Variablen x_i und x_{k+1} eine funktionale Abhängigkeit herzustellen, welche in x_{k+1} eine Maßbestimmung allein durch die Maßbestimmungen der x_i definiert, wenn die Funktion φ die spezielle Form (4) eines Potenzproduktes hat.

Wir nennen eine Gleichung zwischen den Übergangsfaktoren (4) eine „Dimensions-

gleichung". Man kann zu der Gleichung (4) auf Grund verschiedenartiger Voraussetzungen gelangen. Frau Ehrenfest hat aus einer etwas anderen Forderung dieselbe Beziehung abgeleitet, was aber mathematisch auf dasselbe hinausläuft, nämlich die Lösung einer zu (3) gleichwertigen Funktionalgleichung. Jedoch sind die dort gemachten Voraussetzungen in ihrer physikalischen Bedeutung nicht so durchsichtig. Frau Ehrenfest fordert, daß ξ_{k+1} so definiert sein muß, daß die Transformationen

$$x'_{k+1} = \xi_{k+1} x_{k+1}$$

eine Gruppe bilden, daß also zwei Übergangsfaktoren ξ_{k+1} und ξ'_{k+1} hintereinander angewandt, wieder zu einem der Definition entsprechenden Übergangsfaktor führen. Das aber bedeutet, daß

$$\xi_{k+1} \cdot \xi'_{k+1} = \varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3 \dots \xi_k) \cdot \varphi(\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3 \dots \xi'_k) = \varphi(\xi_1 \xi'_1, \xi_2 \xi'_2, \xi_3 \xi'_3 \dots \xi_k \xi'_k)$$

sein muß. Die hieraus für φ sich ergebenden partiellen Differentialgleichungen sind dieselben, wie die aus (3) folgenden. Offenbar ist bei uns prinzipiell nichts anderes verlangt.

Die Funktionalgleichung (3) legt auch der Funktion f eine Einschränkung auf; wenn wir (3) nach f ausrechnen; erhalten wir:

$$f(x_1, x_2, x_3 \dots x_k) = \varkappa x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot x_3^{\alpha_3} \dots x_k^{\alpha_k}, \quad (5)$$

wobei die Exponenten α_i die nämlichen sind, wie in dem Potenzprodukt (4) der ξ_i. Sind aber einige der Variablen x_i schon abgeleitete Variable der übrigen und bestehen also Dimensionsgleichungen (4), welche wir in die symmetrischere Form:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1^{\alpha_{11}} \cdot \xi_2^{\alpha_{12}} \cdot \xi_3^{\alpha_{13}} \dots \xi_k^{\alpha_{1,k}} &= 1 \\ \xi_1^{\alpha_{21}} \cdot \xi_2^{\alpha_{22}} \cdot \xi_3^{\alpha_{23}} \dots \xi_k^{\alpha_{2,k}} &= 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \end{aligned}\right\} \quad (4a)$$

anschreiben können, so lautet die allgemeinste Funktion f, die eine Maßbestimmung einer neuen Variablen x_{k+1} allein auf Grund der physikalischen Maßprinzipe der Grundvariablen definiert:

$$\xi_{k+1} = f(\xi_1, \xi_2 \dots \xi_k) = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \dots x_k^{\alpha_k} \cdot \Phi\left(H^{k}_{i=1}(x_i^{\alpha_{1i}}), H^{k}_{i=1}(x_i^{\alpha_{2i}}), \dots\right) \quad (5a)$$

wobei Φ eine völlig willkürliche Funktion ihrer Argumente ist. Es besteht dann neben (4a) auch noch die weitere Dimensionsgleichung (4).

Eine Funktion f der voneinander unabhängigen Variablen x_i, welche allein aus den Maßprinzipien der x_i eine Maßbestimmung in x_{k+1} definiert, welche also die mathematische Eigenschaft hat, bei Transformation ihrer Variablen x_i nach (2) sich nur um einen konstanten Faktor zu verändern, heißt eine homogene Funktion. Als allgemeinste Form einer homogenen Funktion fanden wir den Ausdruck (5); ihm ist eindeutig die Dimensionsgleichung (4) zwischen den Übergangsfaktoren ξ_i und ξ_{k+1} zugeordnet.

Sind die Variablen x_i nicht voneinander unabhängig, bestehen vielmehr zwischen den Übergangsfaktoren ξ_i Bedingungsgleichungen (4a), so ist (5a) die allgemeinste Funktion, welche allein aus den Maßbestimmungen der x_i eine Maßbestimmung in x_{k+1} definiert, und welche bei Transformationen ihrer Variablen nach (2) sich selbst nach (2) transformiert. Wir nennen eine solche Funktion „bedingt homogen" in bezug auf das System „bedingender Gleichungen" (4a). Wir können — infolge der Willkürlichkeit von Φ — jede willkürliche Funktion, als bedingt homogene Funktion auffassen. Zu (5a) gehören als bedingende Gleichungen (4) und (4a), welche sich stets eindeutig aus (5a) ergeben.

Wir sagen, durch die Dimensionsgleichung (4) werden der Variablen x_{k+1} „Dimensionen in bezug auf die Variablen x_i zuerteilt, und wir nennen diese Beziehung eine „analytische", da sie nichts ist als eine Konsequenz unserer vorherigen Konstruktion des x_{k+1}. Wir unterscheiden sie durch diese Bezeichnung von den „synthetischen Dimensionsbeziehungen", auf welche wir sogleich zu sprechen kommen. Diese kann der Verstand nicht beliebig vorschreiben. Sie bedürfen vielmehr eines anderen Prinzips zu ihrer Begründung, und zwar der Erfahrung bei den physikalischen Dimensionsbeziehungen, der Prinzipien der unmittelbaren Erkenntnis bei den geometrischen[1]).

§ 9. Die synthetischen Dimensionsbeziehungen.

Steht eine Maßmannigfaltigkeit x_{k+1}, welche ihre Maßbestimmung gemäß einem der Prinzipe des Kap. I erhalten hat, in naturgesetzlicher Abhängigkeit zu ebenso metrisch schon bestimmten anderen Maßmannigfaltigkeiten $x_1, x_2, x_3 \dots x_k$, so daß

$$x_{k+1} = f(x_1, x_2, x_3 \dots x_k) \quad (6)$$

ist, so läßt sich stets f als bedingt-homogene Funktion ihrer Variablen auffassen, denn unter allen Umständen ist die Willkürlichkeit von Φ in (5a) geeignet, die Funktion (6) darzustellen.

1) Beispiele analytischer Dimensionsbeziehungen: 1. die Geschwindigkeit $v = \frac{l}{t}$; diese neue Variable, welche gemäß (5) aus den Unabhängigen l und t konstruiert ist, hat die Dimensionsgleichung $\xi_v = \xi_l \cdot \xi_t^{-1}$. 2. Die Dimensionsgleichung der Arbeit $A = \mathfrak{K} \cdot l$ lautet $\xi_A = \xi_{\mathfrak{K}} \cdot \xi_l$; daß dies $= \xi_m \xi_l^2 \xi_t^{-2}$ ist, bedarf zur Begründung empirischer Prinzipe; es ist letzteres keine analytische Dimensionsbeziehung.

Wir nehmen zunächst an, daß sich (6) nicht auf die dimensionslose Funktion Φ reduziert. Es ist dann durch das vor Φ stehende Potenzprodukt eine Dimensionsbestimmung der abhängigen Größe x_{k+1} gegeben; und zwar lautet die Dimensionsgleichung

$$\xi_{k+1} = \xi_1^{\alpha_1} \cdot \xi_2^{\alpha_2} \cdot \xi_3^{\alpha_3} \cdots \xi_k^{\alpha_k}, \qquad (7)$$

wenn $f = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot x_3^{\alpha_3} \cdots x_k^{\alpha_k} \cdot \Phi$ ist. Außerdem werden durch Φ den Variablen x_i noch die Bedingungen (4a) auferlegt. Alle diese Dimensionsgleichungen sind „synthetischer" Natur, da sie erst aus der Erfahrung, aus dem Bestehen eines Naturgesetzes folgen. Man darf nicht meinen, den Unterschied zwischen analytisch und synthetisch verwischen zu können, indem man durch (6) die Metrik der Mannigfaltigkeit x_{k+1} gemäß dem zweiten Maßprinzip auf diejenige der Grundvariablen $x_1, x_2, x_3 \ldots x_k$ zurückführend definiert. Denn wir wissen (§ 7), daß das Bestehen einer empirischen Gesetzmäßigkeit notwendige Bedingung für die Möglichkeit einer solchen Definition ist, über deren Form allerdings wir noch in gewissem Umfange frei verfügen können. Es ist also unter allen Umständen ein empirischer Gesetzeszusammenhang notwendig, den wir — je nach der logischen Anordnung unserer Definitionen — an verschiedenen Stellen des theoretischen Systems unterbringen können, aber nie durch eine reine Nominaldefinition zu einer analytischen Aussage machen können.

Wir haben allerdings mit der Willkürlichkeit der metrischen Definitionen (vgl. § 6 und § 7) die Form von (7) noch völlig in der Hand, aber mit jeder Wahl der Metrik ändern sich entsprechend die Formen der übrigen Naturgesetze. Nicht das Wie, sondern das Daß und das relative Wie wird auf einen empirischen Zusammenhang gestützt.

Es war daher der Irrtum einer nominalistischen Anschauung, die Kraft durch $m\dot{v}$ „frei" zu definieren. Allerdings kann man auf diese Weise ein Kräftemaß definieren, aber daß dies möglich ist, das eben ist erst Folge einer Erfahrungstatsache. Man könnte aber genau so gut die Kraftskala definieren durch:

$$\mathfrak{K} = \sqrt{m\dot{v}},$$

wobei also die Kraft die Dimensionsgleichung:

$$\xi_{\mathfrak{K}} = \xi_m^{1/2} \xi_t^{1/2} \xi_l^{-1}$$

bekäme. Dann aber würden die anderen Gesetze eine entsprechend andere Form annehmen; es würde beispielsweise das Additionstheorem der Kräfte nunmehr

$$\mathfrak{K}_r = \sqrt{\mathfrak{K}_1^2 + \mathfrak{K}_2^2}$$

lauten müssen. In der Form also ist die synthetische Dimensionsbeziehung in der Tat noch nicht bestimmt. Man darf sich aber durch diese Unbestimmtheit nicht zu der Annahme verleiten lassen, daß gar kein empirischer Sachverhalt zugrunde liegt.

Sind die zu messenden Größen reine Anschauungsformen, also geometrische Größen (im Raume der physikalischen Erscheinungen) oder Zeitgrößen, so sind synthetische Urteile a priori die Bedingungen der Möglichkeit von synthetischen Dimensionsbezeichnungen zwischen diesen Größen.

Kap. III. Das Lösungssystem der Dimensionsgleichungen der Physik.

§ 10. Haben wir sämtliche physikalischen Gesetze in Form von bedingt homogenen Funktionen (5a) angeschrieben — was stets möglich ist —, so gehören ihnen als bedingende Gleichungen Dimensionsgleichungen von der Form (4a) und (7) an, die uns angeben, inwieweit es erlaubt ist, die noch konventionellen Einheiten der physikalischen Maßmannigfaltigkeiten untereinander zu variieren. Das System dieser bedingenden Dimensionsgleichungen lautet:

$$\left.\begin{array}{l} \xi_1^{\alpha_{11}} \xi_2^{\alpha_{12}} \xi_3^{\alpha_{13}} \xi_4^{\alpha_{14}} \cdots \xi_k^{\alpha_{1k}} = 1, \\ \xi_1^{\alpha_{21}} \xi_2^{\alpha_{22}} \xi_3^{\alpha_{23}} \xi_4^{\alpha_{24}} \cdots \xi_k^{\alpha_{2k}} = 1, \\ \xi_1^{\alpha_{31}} \xi_2^{\alpha_{32}} \xi_3^{\alpha_{33}} \xi_4^{\alpha_{34}} \cdots \xi_k^{\alpha_{3k}} = 1, \\ \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \xi_1^{\alpha_{n1}} \xi_2^{\alpha_{n2}} \xi_3^{\alpha_{n3}} \xi_4^{\alpha_{n4}} \cdots \xi_k^{\alpha_{nk}} = 1. \end{array}\right\} \quad (4a)\,(7)$$

Es ist nun möglich und — rein formal betrachtet — sogar wahrscheinlich, daß diese Gleichungen sich widersprechen, so daß

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = \cdots = \xi_k = 1 \qquad (8)$$

das einzige Lösungssystem ist. Das würde bedeuten, daß keine der Einheiten variiert werden darf, ohne die Form der physikalischen Gesetze zu zerstören, da alle Übergangsfaktoren $\xi_i = 1$ sind. Frau Ehrenfest hält (Math. Ann. 87, § 8c) diesen Fall für möglich. Das hergebrachte Dimensionssystem, das sogenannte C.G.S.-System, behauptet, daß das System der bedingenden Gleichungen drei Variable willkürlich läßt — man wählt bekanntlich gewöhnlich dazu die Einheiten der Länge, Zeit und Masse —, während alle übrigen Einheiten mit der Wahl dieser drei Grundeinheiten festgelegt sind. Herr Tolman behauptet (l. c.), nur eine dieser drei Variablen sei willkürlich, mit ihrer Wahl seien die Einheiten aller physikalischen Mannigfaltigkeiten eindeutig bestimmt, und er benutzt diese Behauptung zur Begründung seines „Prinzips der Ähnlichkeit", auf welches wir alsbald zu sprechen kommen werden.

§ 11. Zunächst müssen wir feststellen, daß

alle diese Behauptungen eines klaren Sinnes noch entbehren. Wir müssen uns nämlich folgendes vergegenwärtigen: Als Ausdruck einer Erfahrungstatsache sind wir bei der Aufstellung der homogenen Gleichung (5a) eines Naturgesetzes niemals sicher, ob schon alle Größen x_i, durch welche die abhängige Größe x_{i+1} bestimmt wird, als variable Größen auf der rechten Seite von (6) bzw. (5a) berücksichtigt sind[1]).

Infolge des induktiven Charakters aller physikalischen Gesetzeserkenntnis sind wir demgemäß niemals imstande, mit Sicherheit zu behaupten, daß ein System von Dimensionsgleichungen schon alle Variable umfaßt, und wir können infolgedessen jedes Dimensionssystem in seinen Einheiten beliebig variabel machen, wenn wir weitere (verborgene) Variable x_l adjungieren[2]). Frau Ehrenfest behauptet, es wäre dann durchaus nicht gesagt, daß die Zahl der zu adjungierenden Variablen endlich sei (Math. Ann. 77, § 8b).

Der Skeptizismus von Frau Ehrenfest ist insofern berechtigt, als er in der Tat feststellt, daß a priori eine Aussage über die bedingte Homogenität der physikalischen Gleichungen unsinnig ist, insofern man das triviale Gleichungssystem (8) ausschließt. Es ist aber ein nominalistisches Vorurteil, damit die Möglichkeit einer solchen Homogenität für absurd zu halten. Das Prinzip der Homogenität der physikalischen Gleichungen gegenüber einem nichttrivialen Dimensionsgleichungssystem bedarf einer induktorischen Grundlegung, und seine Prüfung kann nicht an seinen Prämissen, sondern nur an seinen Konsequenzen erfolgen. Die erhobenen skeptischen Einwände aber stehen auf derselben Stufe wie diejenigen, welche einst gegen den II. Hauptsatz gemacht wurden, solange keine Klarheit darüber herrschte, daß der II. Hauptsatz der Thermodynamik kein rationales, sondern ein empirisches Prinzip hat.

Es liegen nun die Verhältnisse hier besonders unbequem, den empirichen Sachverhalt, der dem Homogenitätsprinzip zugrunde liegt, zu formulieren. Denn die oben bemerkte Unsicherheit in der Zahl der auftretenden Variablen macht bereits die Aufstellung der Dimensionsgleichungen unsicher. Wir werden uns bemühen, den fraglichen Sachverhalt in eine allgemeine und möglichst plausible Form zu kleiden (Kap. IV), wodurch seine allgemeine Gültigkeit verständlich erscheint, ähnlich wie die Behauptung der prinzipiellen Unmöglichkeit eines Perpetuum mobile II. Art den II. Hauptsatz eigentlich erst plausibel gemacht und eingebürgert hat. Herr Tolman hat, indem er eine derartige Formulierung seines Prinzips der Ähnlichkeit unterließ, dasselbe ungerechtfertigten Angriffen ausgesetzt.

§ 12. Herr Tolman formuliert sein Prinzip in folgender Weise: „Die Fundamentaleinheiten, aus welchen das physikalische Universum konstruiert ist, sind derartig, daß durch sie ein Mikrokosmos („miniature universe") konstruiert werden kann, welcher dem ursprünglichen Universum in jeder Hinsicht genau ähnlich ist" (Phys. Rev. II, 3, S. 244).

Aus seinen Darlegungen geht hervor, wie diese etwas dunkle und nicht ganz eindeutige Aussage zu verstehen ist. Es handelt sich nämlich bei Herrn Tolman nicht etwa um die Betrachtung zweier verschiedener Welten („materielle Änderung"[1])), wozu die Bezeichnung „universe" verleiten könnte, sondern um die Ausmessung derselben Welt durch zwei Beobachter mit verschiedenen konventionellen Einheiten aller Maßmannigfaltigkeiten („formelle Änderung"[1])). Hierbei macht Herr Tolman, gewisse empirische Daten berücksichtigend, über die Verhältnisse der Maßeinheiten der beiden Beobachter eine Reihe einschränkender Bedingungen, welche zu der schon erwähnten Konsequenz führt, daß nur eine der Einheiten, etwa die Einheit der Länge, frei verfügbar ist.

In unserer Terminologie können wir daher die Tolmansche Behauptung deutlicher aussprechen: „Alle physikalischen Gleichungen sind bedingt homogen. Und zwar lauten die bedingenden Dimensionsgleichungen:

$$\xi_x = \xi_l^{\alpha_x}, \qquad (9)$$

wobei ξ_x der Übergangsfaktor irgendeiner Maßmannigfaltigkeit, ξ_l derjenige der Grundvariablen des Längenmaßes etwa, ist".

§ 13. Die Reduktion der unabhängigen Variablenzahl von 3 des C.G.S.-Systems auf eine einzige leitet Herr Tolman durch die Forderung der Invarianz der Lichtgeschwindigkeit $c = c^*$ und der elektrostatischen Ladung $e = e^*$ ab, da die letztere als diskrete Mannigfaltigkeit

---

1) Ist z. B. zunächst nur die Abhängigkeit des Volumens eines Gases von seinem Drucke bekannt, wie es das Boylesche Gesetz angibt: $v = \frac{\text{const}}{p}$, so wird man zu der Dimensionsgleichung $\xi_v \xi_p = 1$ geführt. Indem man aber weiterhin auch noch findet, daß das Volumen gemäß dem Gay-Lussacschen Gesetze auch eine Temperaturfunktion ist, erweitert sich die Dimensionsgleichung zu $\xi_v \xi_p \xi_T^{-1} = 1$. Wenn ist man sicher, daß v nicht von noch weiteren Variablen abhängt?

2) Eine solche adjungierte Variable ist beispielsweise die Gravitationskonstante $\varkappa$, im traditionellen Dimensionssystem: $\xi_\varkappa = \xi_l^3 \xi_t^{-2} \xi_m^{-1}$, im Tolmanschen: $\xi_\varkappa = \xi_c^2$. Es läßt sich aber zeigen, daß diese Dimensionsgleichungen irrtümlich sein dürften, worauf wir aber erst später eingehen.

1) Nach Ehrenfest, l. c.

eine absolute Maßbestimmung ($\xi_r = 1$) im Riemannschen Sinne besitzt (§ 3).

Daraus ergeben sich die beiden Gleichungen

$$\frac{l}{l^*} = \frac{l^*}{l^{**}} \quad \text{und} \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{e_1 e_2}{x^2} = \frac{e_1 e_2}{x^{*2}} = m^*\frac{d^2x^*}{dt^{*2}}$$

(Coulombs Gesetz)

oder

$$m x^2 \frac{d^2x}{dt^2} = m^* x^{*2}\frac{d^2x^*}{dt^{*2}},$$

mit den Dimensionsgleichungen

$$\xi_l \xi_t^{-1} = 1, \tag{10}$$

$$\xi_m \xi_l^3 \xi_t^{-2} = 1; \tag{11}$$

hierdurch ergibt sich die Reduktion der 3 Variablen auf eine einzige

$$\xi_t = \xi_l, \tag{12}$$

$$\xi_m = \xi_l^{-1}. \tag{13}$$

§ 14. Es ist verständlich, daß in dieser Form das Prinzip der Ähnlichkeit skeptischen Angriffen ausgesetzt ist. Frau Ehrenfest hat zunächst geglaubt[1]), durch Angabe einer Gleichung, welche diesen Dimensionsgleichungen gegenüber nicht bedingt homogen ist, dem Ähnlichkeitsprinzip den Garaus zu bereiten, nämlich durch die Gravitationsgleichung, welche die bedingende Gleichung $\xi_m^{-1}\xi_l^3\xi_t^{-2} = 1$ hat und mit (12) und (13) zu $\xi_l = \xi_m = \xi_t = 1$ führt. Schon Tolman hat in seiner ersten Abhandlung diesen Einwand vorweg genommen und entkräftet durch den Hinweis, daß offenbar die Dimensionen der trägen und der schweren Masse voneinander zu unterscheiden sind. Für die schwere Masse m_s gibt es nämlich eine absolute Maßskala durch den Vergleich mit derjenigen elektrostatischen Ladung, welche der Massenanziehung das Gleichgewicht hält, so daß $\xi_{m_s} = \xi_e = 1$ ist[2]). Dann aber lautet die Dimensionsgleichung der Gravitationsgleichung

$$\xi_m \xi_l^3 \xi_t^{-2} = 1$$

in Übereinstimmung mit der Bedingungsgleichung (11). Hierdurch wird auch der gewöhnlich eingeschlagene Ausweg der Adjunktion einer Gravitationskonstante $\varkappa$ von der Dimension $\xi_m^{-1}\xi_l^3\xi_t^{-2}$ im C.G.S.-System, bzw. ξ_l^2 im Tolmanschen System überflüssig; denn bei Unterscheidung der Dimensionen der trägen und der schweren Massen erhält die Gravitationskonstante $\varkappa$ die Dimension einer reinen Zahl.

Die Begründung der Dimensionsgleichung (12) $\xi_t = \xi_l$, welche Tolman aus der Forderung der Invarianz der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum folgert, müssen wir nach den Betrachtungen, welche wir oben über die Maßbestimmungen der Geschwindigkeiten angestellt haben (§ 6), als unzureichend ansehen. Denn die Lichtgeschwindigkeit spielt diese Ausnahmerolle nicht, wenn wir die oben erwähnte nichteuklidische Metrik der Geschwindigkeiten einführen, in welcher das Additionstheorem der realen Geschwindigkeiten die einfache Form $v_r = v_1 + v_2$ hat. In dieser Skala hat die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes den Wert ∞, und die Geschwindigkeiten erlauben die Transformation

$$v^* = \xi_v v + v_0,$$

welcher gegenüber die relativistischen Gleichungen der Mechanik und Elektrodynamik invariant sind.

Aber Herr Tolman hat mit seiner Behauptung $\xi_t = \xi_l$ einen glücklichen Griff getan, wenn er sie auch ungenügend begründet. Es ist nämlich ein merkwürdiges — und vielleicht nicht ganz zufälliges — Zusammentreffen, daß die zweite uns bekannte diskrete Maßmannigfaltigkeit der Physik, welche als solche eine absolute Maßbestimmung vollständig „in ihrem Begriffe" enthält, nämlich die Wirkungsgröße, durch die Forderung der Invarianz ihrer Einheit, des Planckschen Wirkungsquantums h, gerade zu derselben bedingenden Gleichung führt, wie die Tolmansche Voraussetzung der Invarianz der Lichtgeschwindigkeit.

Die Größe h hat die Dimension Energie mal Zeit $= \xi_m\xi_l^2\xi_t^{-1}$. Das Festhalten ihrer Einheit bedeutet, daß ihr Übergangsfaktor den konstanten Wert 1 hat; wir erhalten also:

$$\xi_m\xi_l^2\xi_t^{-1} = 1 \tag{10a}$$

zusammen mit der Forderung der Invarianz der Maßeinheit der elektrostatischen Ladung (11):

$$\xi_m\xi_l^3\xi_t^{-2} = 1$$

ergibt dies wieder die Tolmanschen Beziehungen (12) und (13).

Auch die Begründung der zweiten Dimensionsgleichung (11), welche Tolman auf Grund der Forderung der Invarianz der Einheit der elektrostatischen Ladung mittels des Coulombschen Gesetzes gibt, könnte wohl bedenklich erscheinen. Denn das Coulombsche Gesetz heißt bekanntlich präziser:

$$\mathfrak{K} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{e_1 e_2}{r_{12}^2},$$

wobei ε die Größe der Dielektrizitätskonstanten bedeutet, deren Dimension sich nicht durch das C.G.S.-System angeben läßt und daher in den elektrodynamischen Einheitssystemen offen bleibt. Man könnte Tolmans Ableitung durch den Hinweis auf die Tatsache verteidigen, daß der

1) Phys. Rev. II, 8.

2) Dieser Schluß ist noch nicht einwandfrei, solange über die Dimension der Konstanten des Zwischenmediums (Dielektrizitätskonstanten) keine Bestimmung getroffen ist, s. u.

$\lim_{\text{Dichte} \to 0} \varepsilon$ für jede Substanz denselben Wert ($= 1$) annimmt, und nur das Coulombsche Gesetz für das Vakuum heranziehen. Doch ist diese Bemerkung nicht sehr befriedigend und jedenfalls die umgekehrte Schlußfolgerung unzulässig, daß die Dimension von ε eine reine Zahl sei.

Wir können aber auf einem anderen Wege zu einer Dimensionsgleichung gelangen, welche der Gleichung (11) gleichwertig ist, und welche diesem Einwande[1]) nicht ausgesetzt ist: Wir benutzen dazu das Gesetz von Stefan-Boltzmann über die Energie der schwarzen Hohlraumstrahlung, welches sich aus rein statistischen Betrachtungen ableiten läßt, so daß über die Vollständigkeit des Systems der Variablen kein Zweifel besteht. Es ist bekanntlich:

$$U = a T^4.$$

Hierzu gehört als Dimensionsgleichung[2]):

$$\xi_m \xi_l^{-1} \xi_T^{-2} = \xi_m^4 \xi_\varepsilon^8 \xi_T^{-8}$$

oder

$$\xi_m^3 \xi_l^3 \xi_T^{-6} = 1.$$

Diese Gleichung aber ist mit (11) identisch.

Es läßt sich nunmehr hieraus zusammen mit der Tolmanschen Forderung der Invarianz der Maßeinheit der elektrostatischen Ladung folgern, daß die Dimension von ε eine reine Zahl ist.

Weiterhin ist nun bekanntlich $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$, als Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektrodynamischer Störungen, von der Dimension $\xi_l \xi_l^{-1} = 1$; es ist also wegen (12) und $\xi_\varepsilon = 1$ auch $\xi_\mu = 1$. Wir erkennen, daß die Diskrepanz der drei bekannten elektrodynamischen Dimensionssysteme nur eine Konsequenz der Unvollständigkeit des C.G.S.-Systems ist. Durch die Hinzufügung der Tolmanschen Bedingungen fallen die drei Dimensionssysteme zusammen. Aber diese Begründung läßt sich allein mit der Tolmanschen Argumentation nicht zirkelfrei geben. Denn die Invarianz der elektrostatischen Ladung allein kann nicht zu diesem Resultate führen; es ist notwendig, noch ein zweites physikalisches Gesetz heranzuziehen.

Kap. IV. Das Prinzip der Ähnlichkeit.

§ 15. Um nun den Ehrenfestschen Eingriffen gegenüber eine geeignete Formulierung des Tolmanschen Prinzips zu finden, wird es sinnvoll sein, eine passende Konsequenz der Ehrenfestschen Behauptung aufzusuchen, deren Negation zwar noch nicht unbedingt ein hinreichender Ausdruck des Prinzips darzustellen braucht, welche aber vielleicht imstande ist, als eine sehr plausible notwendige Grundlage im Verein mit einer weiteren Aussage das Tolmansche Prinzip zu begründen, ähnlich wie der Entropiesatz durch seine negative Formulierung, der Unmöglichkeit eines perpetuo mobile II. Art, erst als eine neue allgemeingültige Tatsache verständlich wurde.

Der Ehrenfestsche Einwand, daß eventuell das System der einzuführenden adjungierten Variablen nicht endlich sei, bedeutet nichts Geringeres als den Zweifel an der Möglichkeit einer deduktiven Theorie der physikalischen Erscheinungswelt. Die „Bedingungen der Möglichkeit einer deduktiven Theorie" habe ich in meiner Dissertation[1]) erörtert. Der Ehrenfestsche Einwand bezweifelt eine notwendige Bedingung, deren Inhalt sehr selbstverständlich ist und nur gelegentlich einer mehr propädeutischen Untersuchung festgestellt wurde, so daß ich sie hier, ohne näher auf den Zusammenhang einzugehen, angebe:

„Die Zahl der Grundbegriffe einer deduktiven Theorie[2]) muß bei jeder sukzessive unbeschränkt fortgesetzten Aufweisung der Urteile des betreffenden Erkenntnisgebietes[3]) unter einer endlichen Schranke bleiben".

Man kann natürlich niemandem verwehren, für die Mannigfaltigkeit der physikalischen Erscheinungen an der Gültigkeit dieser notwendigen Voraussetzung zu zweifeln. Wir jedoch beschließen zu formulieren als

Axiom I: Eine deduktive Theorie der Physik ist möglich.

§ 16. Wir haben hierdurch jedoch noch nicht die Möglichkeit ausgeschaltet, daß neue empirische Gesetzeserkenntnis zu einer weiteren Einschränkung unseres Dimensionssystems führen könnte, so daß:

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \ldots \xi_n = 1$$

das einzige Lösungssystem der Dimensionsgleichungen wäre. Es genügt dann offenbar zu fordern, daß mindestens eine Variable existiert, der gegenüber alle Gesetze der Physik bei Einheitswechsel invariant bleiben. Wir wählen dazu etwa die Zeitvariable t, bei welcher eine absolute Einheit sehr merkwürdig sein würde, und postulieren als

1) Dieser Einwand ist übrigens kein anderer als der oben erwähnte, welcher von Frau Ehrenfest bezüglich der verborgenen adjungierten Variablen erhoben wurde.

2) U ist Energie pro Volumen, T mittlere kinetische Energie der Moleküle.

1) Jahrbuch für Philosophie u. phänomenologische Forschung. Bd VI. 1923.

2) D. h. derjenigen Begriffe, aus welchen alle später einzuführenden Begriffe durch reine Nominaldefinition hervorgehen.

3) Welches eine im allgemeinen unendliche Menge von (möglichen) Urteilen darstellt.

Axiom II: Es sei $\xi_\ell \neq 1$.

Zusammen mit dem geführten empirischen Nachweis, daß die Zahl der Freiheitsgrade sicher nicht > 1 sein kann ((10) und (11)), erhalten wir auf diese Weise das Tolmansche System. Bemerkenswert ist es im übrigen, daß die Zahl der adjungierten Variablen, welche nach Axiom I jedenfalls unter einer endlichen Schranke liegen muß, so weit ich bis jetzt die physikalischen Gleichungen geprüft habe, Null beträgt, nachdem sich herausgestellt hatte, daß die einzige bisher bekannte adjungierte Variable, die Gravitationskonstante $\varkappa$, irrtümlich zu $\xi_\varkappa = \xi_t^2$ bestimmt war. Das Tolmansche Prinzip ist also — wenn auch nur als ein sehr heuristisches Prinzip — unter Umständen geeignet, Lücken in der Zahl der uns bekannten physikalischen Mannigfaltigkeiten aufzudecken, und es scheint demnach, als wären wir bereits im Besitze aller Maßmannigfaltigkeiten. Natürlich kann auch ein gar nicht so seltener Zufall uns diese Lücken gerade kompensierend verbergen; es kann ja $\xi_x^\alpha \xi_y^\alpha = 1$ sein.

§ 17. Tolman benutzt sein Ähnlichkeitsprinzip zur Deduktion physikalischer Gesetze. Das Verfahren beruht auf der Herleitung einer Funktionalgleichung, welche zwischen den fraglichen Variablen infolge der Dimensionsgleichungen bestehen muß. Ist beispielsweise:

$$\xi_a = \xi_b^\alpha,$$

so ist, wenn die zu bestimmende Beziehung zwischen x_a und x_b allgemein durch:

$$x_a = f(x_b)$$

bezeichnet wird, jedenfalls auch:

$$\xi_\alpha x_a = f(\xi_b x_b)$$

oder

$$\xi_a^\alpha f(x_b) = f(\xi_b x_b).$$

Diese Funktionalgleichung für f ergibt durch Differentiation nach ξ_b und x_b und Division die Differentialgleichung:

$$\alpha f(x_b) = \frac{d f(x_b)}{d x_b} \cdot x_b,$$

welche stets lösbar ist. Ihr allgemeines Integral lautet:

$$x_a = f(x_b) = c x_b^\alpha. \qquad (14)$$

Herr Tolman leitet auf diese Weise eine Anzahl physikalischer Gesetze ab. Der Wert der Methode ist sehr gering. Sie beruht offenbar in dem Fruchtbarmachen jener empirischen Sachverhalte, welche wir als stets notwendige Voraussetzung für die Begründung einer Maßbestimmung in einer physikalischen Mannigfaltigkeit erkannt haben (§ 7); diese Sachverhalte werden erklärlicherweise in den üblichen theoretischen Schlußprozessen nicht angewandt. Sie können auf dem beschriebenen Wege durch das Prinzip der Ähnlichkeit dazu ausgewertet werden, bisher nur auf empirischem Wege gefundene Gesetze abzuleiten.

Die Tolmansche Methode ist aber keine Deduktion. Die Prämissen sind nicht hinreichende Grundlage für die Wahrheit der Folgerungen. Außerdem aber darf man den Umfang der neu erschlossenen Möglichkeiten nicht überschätzen. Zunächst nämlich ergibt das Prinzip der Ähnlichkeit nur Ableitungen von Zustandsgleichungen; es ist aber bekannt, daß die wichtigsten und zahlreichsten physikalischen Gesetze nicht die Form von Zustands-, sondern von Differentialgleichungen der physikalischen Größen haben. Die Zustandsgleichungen spielen nur eine sehr subordinierte Rolle und werden sogar deshalb im allgemeinen als Unbestimmte in den physikalischen Theorien mitgeführt. Ein Zweites aber läßt die Möglichkeiten, welche das Tolmansche Prinzip eröffnet, sehr begrenzt erscheinen: Es muß schon vorher bekannt sein, welche Variablen allein die Unabhängigen einer funktionalen Gesetzmäßigkeit sind; nur dann ist es überhaupt möglich, daß das Tolmansche Prinzip ein richtiges Resultat liefert. Diese Vollständigkeit aber zu erbringen, ist in den meisten Fällen schwieriger, als das fragliche Gesetz auf anderem Wege zu gewinnen. Das Tolmansche Resultat wird aber sogar völlig illusorisch, wenn das Gesetz mehr als 2 Variable umfaßt, da dann jede willkürliche Funktion Φ einer dimensionslosen Kombination der unabhängigen Variablen als multiplikative Größe zu der fraglichen Funktion hinzutreten kann. Insofern sind alle Ableitungen, die Herr Tolman über physikalische Gesetze zwischen mehr als 2 Variablen macht, völlige Zufallstreffer. Das Tolmansche Prinzip ist keine „ars inveniendi"; wenn es sich auch nicht als eine brauchbare wissenschaftliche Methode herausgestellt hat, so erkennen wir in ihm doch den Ausdruck einer bisher nicht gekannten physikalischen Tatsache und gewißlich einer sehr merkwürdigen.

(Eingegangen 2. Juni 1922.)

BESPRECHUNGEN.

Hans Thirring, Die Idee der Relativitätstheorie. IV u. 170 S. Mit 7 Abbildungen. Berlin, J. Springer. 1921.

Das Buch ist in hohem Maße geeignet, Lesern ohne mathematische Vorkenntnisse eine Vorstellung von dem Problemkomplex der speziellen und allgemeinen Relativitätstheorie und der neuen Gravitationslehre zu geben. Insbesondere ist die Vollständigkeit des Werkes hervorzuheben: Fast jeder wichtige Gedanke der Relativitätstheorie wird hier entweder ausführlich dargelegt oder, wenn das ohne mathematische Hilfsmittel nicht möglich sein sollte, doch wenigstens andeutungsweise zur Sprache gebracht. Dabei knüpft der Verfasser vielfach an die Beispiele an, die vom Schöpfer der Theorie in seinen älteren vorbereitenden Arbeiten gegeben wurden. Auch in sich ist die Darstellung abgeschlossen. Die in der Theorie durch mathematische Deduktion gegebenen Verknüpfungen sind in dem vorliegenden Buche durch rein gedankliche Überlegungen ersetzt, so daß man nirgends etwas hinzunehmen braucht, ohne daß es mit Bekanntem verknüpft wäre. Besonders wird die Anschaulichkeit noch dadurch erhöht, daß den Beispielen ganz konkrete Zahlenangaben zugrunde gelegt werden, und sie bis in alle Einzelheiten diskutiert werden.

Der erste Teil bringt die Besprechung der speziellen Relativitätstheorie. Besonders eingehend ist hier die schwierige Analyse des Gleichzeitigkeitsbegriffs gegeben. Der zweite Teil beschäftigt sich mit der allgemeinen Relativitätstheorie. Hier wird z. B. im Anschluß an Einsteins ältere Arbeiten eine gemeinverständliche Darstellung der Theorie von der Krümmung der Lichtstrahlen im Schwerefeld gegeben; jener Theorie, deren experimentelle Bestätigung erst die allgemeine Aufmerksamkeit auf Einsteins Werk gelenkt hat.

Im letzten Paragraphen werden die Anschauungen Einsteins über die Endlichkeit der Welt entwickelt. In diesem Zusammenhang ist indes zu bemerken: Daß nur gekrümmte Flächen und Räume geschlossen sein könnten (S. 161), trifft nicht zu, wie Untersuchungen von Clifford und Klein gelehrt haben. Am Schlusse des Buches finden wir eine Tafel, die den logischen Zusammenhang der Grundgedanken der Relativitätstheorie durch einen Stammbaum zur Anschauung bringt.

P. Hertz.

Tagesereignisse.

Mitteilung der Redaktion.

Die Physiko-Mathematische Gesellschaft in Kratnodar (Rußland) sendet der Redaktion folgenden Hilferuf:

„Der Hunger im Nordkaukasus gibt den Gliedern der Physiko-Mathematischen Gesellschaft in Kratnodar (Ekaterinodar) viel zu leiden. Wenn ihnen keine Hilfe durch Nahrungsmittel erteilt wird, muß die wissenschaftliche Arbeit aufhören und die Gesellschaft muß geschlossen werden. Außerdem hofft die Gesellschaft auf eine Teilnahme in diesen schweren Verhältnissen ihrer Glieder von der Seite der Mitarbeiter, welche augenblicklich sich in glücklicheren Umständen befinden. Deshalb bittet das Präsidium der Gesellschaft laut des Beschlusses der Versammlung vom 19. März, daß die Redaktion die deutschen Freunde der physikalischen Wissenschaft mit der schweren Lage der Glieder der Gesellschaft bekannt machen möchte. Die Hilfe durch Nahrungsmittel kann vermittels der amerikanischen Hilfsadministration (American Relief Administration) in Rostow am Don expediert werden an die Adresse: Kratnodar, Physiko-Mathematische Gesellschaft, Gymnasiumstraße 47, Professorenheim.

In dieser Gesellschaft arbeiten mehrere Professoren der Hochschulen von Moskau und Petersburg. Der Präsident der Gesellschaft ist Prof. B. Rosing, Erfinder des elektrischen Teleskopes, begründet auf der Anwendung der Kathodenstrahlen (siehe Korn, „Elektrische Telephotographie").

gez. Präsident B. Rosing.
gez. Glied der Ges. Boris N. Siana.

Wir geben diesen Notruf zur Kenntnis unserer Leser und bitten, den notleitenden Fachgenossen in Rußland zugedachte Spenden an die Redaktion dieser Zeitschrift zu schicken. Eine vorläufige Sammlung unter den Göttinger Physikern und Mathematikern ergab den Betrag von 1105 M.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule Dresden Dr. Gebhard Widmann für Experimentalphysik, insbesondere Optik.

Ernannt: Der Chefchemiker der U. S. Experimental Kelp Potash Plant in Summerland H. G. Tanner zum a. o. Professor für Chemie an der Universität von Oregon, der Privatdozent an der Universität Göttingen Dr. Carl Siegel zum ord. Professor der Mathematik an der Universität Frankfurt a. M., der Direktor der Firma Rhenania in Köln Dr. Fr. Quincke zum ord. Professor der technischen Chemie an der Technischen Hochschule Köln, der a. o. Professor an der Universität Freiburg Dr. K. Freudenberg zum ord. Professor der Chemie an der Technischen Hochschule Karlsruhe, J. J. Jenko zum Professor der Chemie am Northern Illinois State Teachers College Dekalb, Dozent Lennart Smith zum Professor der Chemie an der Universität Lund, Dr. Colin G. Pink zum Dozenten für Elektrochemie an der Columbia Universität in New York, Sebastiano Condelli zum Dozenten für allgemeine, F. Ferrari zum Dozenten für angewandte Chemie an der Universität Pisa, Luigi Alessandri zum Dozenten für Chemie am Istituto di studi superiori in Florenz.

Verliehen: Dem Privatdozenten für pharmazeutische Chemie an der Universität Berlin Regierungsrat Dr. Otto Anselmino die Dienstbezeichnung a. o. Professor, dem Privatdozenten für Chemie an der Universität Heidelberg Dr. E. Wilke die Dienstbezeichnung a. o. Professor.

Abgelehnte Berufung: Der ord. Professor der theoretischen Physik an der Universität Münster Dr. Adolf Kratzer in gleicher Eigenschaft an der Universität Tübingen (23, 240, 1922).

Auszeichnungen: Dem früheren ord. Professor der Physik an der Universität Würzburg Dr. Johannes Stark wurde von der Italienischen Gesellschaft der Wissenschaften die Goldene Matteucci-Medaille verliehen.

Angebote.

Etatsmäßige

Assistentenstelle

für gut ausgebildeten Physiker. Bei ausführlichen Bewerbungen bitte Arbeiten miteinsenden.

Institut für physikalische Grundlagen der Medizin an der Universität Frankfurt (Main), Weigertstraße 3.

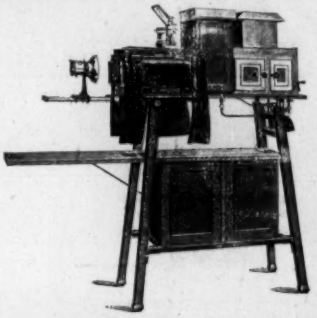
Für die Schriftleitung verantwortlich Dr. Erich Hückel in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

MAX KOHL A.G. Chemnitz

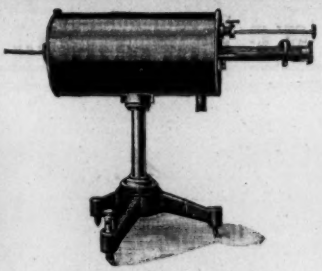
Volleingezahltes Kapital Mk. 2400000.

Physikalische Apparate
Funken-Induktoren
Ölluftpumpen
Experimentier-Schalttafeln
Projektions-Apparate
Laboratorienmöbel
in gediegener Ausführung.

Weltausstellung Brüssel 1910: 4 Große Preise; Turin 1911: 2 Große Preise; Dresden 1911: Großer Preis.



Kohls Megadiaskop. Projektions-Apparat für alle im Unterricht gebräuchlichen Projektionsarten, z. B. für durchfallendes Licht, für auffallendes Licht, für Mikroprojektion, Spektral-, Polarisations-Interferenzerscheinungen usw.



Apparate für luftelektrische und radioaktive Untersuchungen.
Normalbatterie für elektrostatische Messungen.
Kondensatoren, Mikrowage.
Erdbebenregistrierapparate.

Spindler & Hoyer G.m.b.H.
Mechan. u. opt. Werkstätten
Göttingen 3.

CARL LEISS
OPTISCHE ANSTALT
BERLIN-STEGLITZ
STUBENRAUCH-PLATZ 1

Spektroskope

Spektral-Apparate
mit Wellenlängentrommel (D.R.G.M.)

Monochromatoren
mit Wellenlängentrommel (D.R.G.M.)

Neuer Ultraviolett-Monochromator (D.R.G.M.)

Neue Universal-Monochromatoren

Spektrographen
mit Glas- und Quarz-Optik

Gitter-Spektrographen
mit Glas- und Quarzgitter

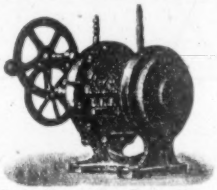
Spektrometer und Refraktometer

Phosphoroskop nach Lenard

Arthur Pfeiffer, Wetzlar

Gegründet 1890

Fabrik physikalischer, chemischer und technischer Apparate

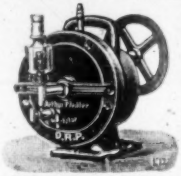


Rotier. Quecksilber-Hochvakuumpumpe System Pfeiffer. D. R. P.

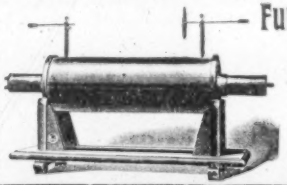
Spezialfabrik für Hochvakuumpumpen

zu wissenschaftlichen und technischen Zwecken

Alle Arten Luftpumpen, Kolben-Ölluftpumpen, rotierende Ölluftpumpen, rotierende Quecksilberluftpumpen für Betrieb und Laboratorium



Rotierende Quecksilber-Hochvakuumpumpe System Gaede. D. R. P.



Funkeninduktoren bis 1000 mm Funkenlänge

Normaltypen von 6—1000 mm Funkenlänge mit Unterbrechern aller Art

Spezial-Funkeninduktoren für technische und wissenschaftliche Zwecke

Listen kostenlos von Abteilung E verlangen.

E. Leybold's Nachfolger

Cöln a/Rhein

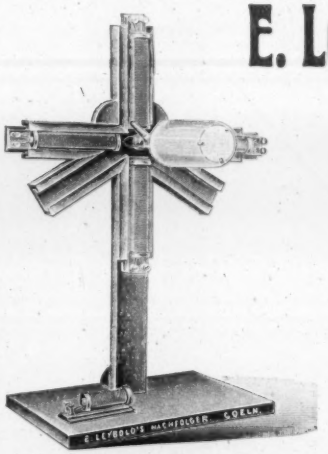
Fabrik physikalischer Apparate

Zweigniederlassung:

Berlin NW 7, Dorotheenstraße 53

Projektionsapparate für Diaskopie und Episkopie

Hochvakuumpumpen nach Gaede



Universalstativ für Braun'sche Röhre nach Simon und Reich.

Katalog, enthaltend 16000 Nummern, wird Instituten auf Wunsch übersandt.

Für den Anzeigenteil verantwortlich S. Hirzel in Leipzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.